

Dokładność wybranych metod prognozowania wynagrodzeń i liczby pracujących w Polsce

Jan Acedański*, Jolanta Bernais[#], Adrianna Mastalerz-Kodzis[‡]

Nadesłany: 16 kwietnia 2013 r. Zaakceptowany: 16 października 2013 r.

Streszczenie

Celem pracy była analiza dokładności wybranych metod prognozowania zmiennych opisujących polski rynek pracy w latach 1998–2013. Badaniu poddano następujące zmienne: liczbę pracujących w gospodarce narodowej według GUS, liczbę pracujących według BAEL oraz średnie miesięczne wynagrodzenie w gospodarce narodowej. W porównaniach uwzględniono: modele wektorowej autoregresji VAR, bayesowskie modele VAR, dynamiczne modele czynnikowe, modele wskaźników wyprzedzających oraz metody łączenia prognoz. Uzyskane wyniki wskazały, że w zdecydowanej większości przypadków największą dokładnością, mierzoną błędem średniokwadratowym prognoz wygasłych, cechowały się prognozy łączone, uwzględniające modele czynnikowe oraz modele wskaźników wyprzedzających. Te dwie klasy modeli dawały lepsze prognozy niż tradycyjne modele wektorowej autoregresji. Pokazano również, że napływ kolejnych danych miesięcznych nie prowadził do poprawy jakości prognoz na dany kwartał.

Słowa kluczowe: prognozowanie, rynek pracy, dynamiczne modele czynnikowe, modele wskaźników wyprzedzających, prognozy łączone

JEL: C53, E24, E27

* Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Wydział Ekonomii; e-mail: jan.acedanski@ue.katowice.pl.

[#] Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Wydział Zarządzania.

[‡] Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach, Wydział Zarządzania.

1. Wstęp

Rynek pracy odgrywa niezwykle ważną rolę w gospodarce. Takie zmienne, jak poziom zatrudnienia czy stopa bezrobocia, są w wielu przypadkach punktem odniesienia do oceny skuteczności działań prowadzonych w ramach określonej polityki gospodarczej. Stąd też często pojawia się konieczność prognozowania sytuacji na rynku pracy, którego sposób funkcjonowania zależy między innymi od decyzji o poziomie wydatków publicznych, siły działania systemu podatkowego, skuteczności polityki społecznej, atrakcyjności pracy i czasu wolnego, poziomu i struktury konsumpcji czy skłonności do inwestowania.

W ostatnich latach w literaturze obserwuje się wzrost zainteresowania metodami krótkookresowego prognozowania szeregów czasowych. Można do nich zaliczyć między innymi modele wektorowej autoregresji, dynamiczne modele czynnikowe oraz modele wskaźników wyprzedzających. Przy dużej liczbie możliwych podejść istotny jest wybór najlepszych metod prognozowania. Ponieważ dla danej zmiennej prognozowanej bardzo trudno *ex ante* wskazać najwłaściwsze podejście, konieczna jest zwykle analiza dokładności prognoz *ex post* uzyskanych różnymi metodami.

Celem pracy była analiza dokładności prognoz wybranych zmiennych opisujących polski rynek pracy, uzyskanych różnymi metodami. Wśród badanych zmiennych rozważano: liczbę pracujących w gospodarce narodowej według GUS, liczbę pracujących według BAEL oraz średnie miesięczne wynagrodzenie w gospodarce narodowej. Analizowano dokładność takich metod, jak: modele wektorowej autoregresji VAR, bayesowskie modele VAR, dynamiczne modele czynnikowe (ang. *dynamic factor models* – DFM), modele wskaźników wyprzedzających (ang. *leading indicators* – LI) oraz metody łączenia prognoz.

W pracy rozważano dwie podstawowe hipotezy: (1) największą dokładnością, mierzoną błędem średniokwadratowym prognoz wygasłych, cechują się prognozy łączone oraz (2) prognozy uzyskane za pomocą modeli czynnikowych oraz modeli wskaźników wyprzedzających są dokładniejsze niż prognozy generowane przez tradycyjne modele wektorowej autoregresji.

Od strony metodologicznej największą trudnością jest to, że zmienne prognozowane i zmienne objaśniające mają różną częstotliwość obserwacji. Dane dotyczące zmiennych prognozowanych publikowane są co kwartał, natomiast wiele potencjalnych zmiennych objaśniających występujących w modelach DFM oraz LI mierzonych jest z częstotliwością miesięczną. W przypadku wspomnianych modeli pozwala to na formułowanie prognoz co miesiąc. Wykorzystanie bardziej aktualnych danych miesięcznych jest też źródłem potencjalnej przewagi modeli DFM oraz LI nad modelami autoregresyjnymi. W związku z tym w niniejszej pracy weryfikowano dodatkową, trzecią hipotezę, że wraz z napływem kolejnych danych miesięcznych wzrasta dokładność prognoz na dany kwartał, uzyskiwanych za pomocą modeli LI oraz DFM. Kwartalny charakter zmiennych prognozowanych sprawia, że pod względem metodologicznym prognozowanie zmiennych rynku pracy bardziej przypomina prognozowanie dynamiki PKB i wyraźnie różni się od metodologii badań nad inflacją.

Istotnym problemem w prognozowaniu jest wybór właściwego schematu prognostycznego oraz długości próby. W związku z tym próbowano również ocenić, jak przyjęty schemat prognostyczny oraz różna długość prób wpływają na dokładność prognoz.

W literaturze dotyczącej prognozowania makroekonomicznego przedmiotem zainteresowania badaczy najczęściej jest dynamika PKB oraz inflacja (zob. Stock, Watson 1999; Banerjee, Marcellino, Masten 2005; Eickmeier, Ziegler 2008; Barhoumi i in. 2008; Giannone, Reichlin, Small 2008; Baranowski,

Leszczyńska, Szafranski 2010; Angelini i in. 2011; Koop, Korobilis 2011). Zmienne te odgrywają decydującą rolę w opisie gospodarki danego kraju, a także przy podejmowaniu decyzji w zakresie polityki pieniężnej i gospodarczej. Badania nad prognozowaniem zmiennych opisujących sytuację na rynku pracy prowadzone są dużo rzadziej. Tymczasem potrzeby w tym zakresie są duże. W wielu krajach przyjęto na przykład, że o pozytywnej ocenie polityki gospodarczej nie decyduje wysokie tempo wzrostu gospodarczego, ale pełne zatrudnienie. Z kolei dynamika wynagrodzeń odgrywa główną rolę w ocenie presji płacowej, wpływającej na poziom inflacji w gospodarce.

Prognozowaniem zmiennych opisujących rynek pracy zajmowali się między innymi Rapach i Strauss (2008; 2012). Rozważali metody łączenia prognoz w odniesieniu do zatrudnienia w Stanach Zjednoczonych i stwierdzili, że często dawały one dokładniejsze wyniki niż modele autoregresyjne. Przewaga ta była szczególnie widoczna w okresach recesji. Gupta i in. (2012) zauważyli, że modele czynnikowe, uwzględniające długookresowe zależności opisane za pomocą mechanizmu korekty błędem, pozwalały na dokładniejsze prognozowanie dynamiki zatrudnienia sektorowego w Stanach Zjednoczonych w porównaniu z modelami VAR oraz BVAR. Siliverstovs (2013) rozważał natomiast znaczenie ankietowych badań koniunktury dla poprawnego prognozowania zatrudnienia w Szwajcarii. Marcellino, Stock i Watson (2003) badali dokładność prognoz stopy bezrobocia, a także inflacji oraz PKB w strefie euro i jej krajach członkowskich. W odniesieniu do stopy bezrobocia najlepsze prognozy w rozważanych przez nich warunkach generowane były przez modele czynnikowe oraz modele VAR. Z kolei Christoffel, Warne i Coenen (2010) oceniali zdolności prognostyczne dużego modelu DSGE dla strefy euro, biorąc pod uwagę także zmienne opisujące rynek pracy. W odniesieniu do kwartalnej dynamiki zatrudnienia rozważany przez nich model cechował się bardzo dobrymi zdolnościami prognostycznymi w porównaniu z różnymi wersjami modeli VAR oraz BVAR. Jednak w przypadku płac nominalnych spisywał się wyraźnie gorzej od innych podejść.

Praca składa się z sześciu części. W części drugiej omówiono zmienne prognozowane i objaśniające. Następnie przedstawiono zastosowane w pracy metody prognozowania. W części czwartej zaprezentowano metodologiczne aspekty porównywania dokładności prognoz. Część piąta zawiera wyniki badań.

2. Zmienne

Do prognozowania wybrano trzy zmienne charakteryzujące sytuację na rynku pracy: wynagrodzenia w gospodarce narodowej, liczbę pracujących w gospodarce narodowej oraz liczbę pracujących według Badania Aktywności Ekonomicznej Ludności (BAEL). Dokładne definicje poszczególnych zmiennych oraz sposób ich pomiaru można znaleźć w opracowaniach GUS (2008; 2010; 2013).

Zgodnie z definicją przyjętą w badaniach BAEL pracującym jest osoba wykonująca jakąkolwiek pracę, także w szarej strefie i dorywczą. Obejmuje ona zatem znacznie szerszą grupę osób niż oficjalna sprawozdawczość. Należy jednak pamiętać, że liczba pracujących według BAEL nie zawiera niektórych kategorii osób zaliczanych do pracujących w badaniach prowadzonych przez GUS. Są to na przykład pracujący, którzy mieszkają w hotelach robotniczych czy pracują za granicą na rzecz polskich pracodawców. Dodatkowo zmienne te istotnie różnią się metodą gromadzenia danych. W przypadku pracujących w gospodarce narodowej dane pochodzą z oficjalnej sprawozdawczości przedsiębiorstw, a w BAEL – z badań ankietowych poszczególnych osób. Można więc uznać, że liczba pracujących w gospodarce na-

rodowej oraz liczba pracujących według BAEL uzupełniają się, i oddzielnie analizować ich kształtowanie się (por. Cichocki i in. 2013). Z tego powodu w niniejszej pracy rozpatrywano obie te zmienne. Ich dynamikę w okresie objętym badaniem ilustrują wykresy 1 i 2.

Zbiór potencjalnych zmiennych objaśniających liczył pierwotnie 135 szeregów, w tym 106 szeregów o częstotliwości miesięcznej oraz 29 szeregów o częstotliwości kwartalnej. Z pierwotnego zbioru usunięto zmienne, dla których współczynnik korelacji liniowej Pearsona z innymi zmiennymi przekraczał 0,9, a także te, w których występowały wyraźne obserwacje odstające. Jak pokazały badania Boivina i Ng (2006), rozszerzanie zbioru zmiennych objaśniających w modelach czynnikowych nie musi prowadzić do poprawy jakości predykcji. Co więcej, obecność zmiennych wnoszących bardzo niewiele nowych informacji może nawet zmniejszać zdolności prognostyczne tych modeli. Po wstępnej selekcji pozostało 67 zmiennych, w tym 61 o częstotliwości miesięcznej i 6 o częstotliwości kwartalnej. Ostateczny zbiór zmiennych objaśniających zawierał zmienne dotyczące rynku pracy, sytuacji makroekonomicznej, koniunktury, handlu zagranicznego, a także zmienne opisujące sferę monetarną i zmienne mające charakter syntetycznych wskaźników wyprzedzających. Ich szczegółową listę zawiera tabela 5.

Dane kwartalne obejmowały okres od II kwartału 1998 r. do II kwartału 2013 r. (61 obserwacji), natomiast miesięczne – od maja 1998 r. do sierpnia 2013 r. (184 obserwacje). W przypadku niektórych zmiennych objaśniających brakowało danych, szczególnie z początkowych okresów. Brakowało też danych na końcu próby, co wiązało się z różnym czasem publikacji danych. Datą końcową, do której gromadzono dane (ang. *cut-off date*), był 10 września 2013 r. W przypadku modeli DFM brakujące dane uzupełniano za pomocą algorytmu maksymalizacji oczekiwań (ang. *expectations maximization* – EM; zob. Stock, Watson 1998). W modelach wskaźników wyprzedzających duże braki danych na początku szeregu czasowego wykluczały daną zmienną jako potencjalny wskaźnik wyprzedzający ze względu na zbyt małą liczbę obserwacji do testowania modelu.

Wszystkie zmienne zostały odsezonowane za pomocą procedury TRAMO/SEATS z automatyczną identyfikacją modelu. W ustawieniach programu przyjęto wartość parametru RSA = 4 (zob. Gomez, Maravall 1998). Dodatkowo wiele zmiennych poddano przekształceniom, mającym na celu sprowadzenie ich do postaci stacjonarnej. Wyrażone zostały więc jako stopy wzrostu bądź przyrosty. Bez zmian pozostały tylko wskaźniki koniunktury. Obserwacje kwartalne przekształcono do postaci miesięcznej, przyjmując takie samo tempo wzrostu badanej zmiennej w każdym miesiącu. Na koniec wszystkie szeregi poddano standaryzacji.

3. Modele

Wybrane metody są dość powszechnie stosowane do prognozowania i w miarę szeroko opisywane w literaturze. Dlatego w niniejszej pracy omówiono tylko ich najważniejsze cechy, koncentrując się na wskazaniu konkretnych wariantów metod zastosowanych w przeprowadzonym badaniu.

3.1. Modele wektorowej autoregresji

Tradycyjnym punktem odniesienia w badaniu zdolności prognostycznych różnych metod są modele wektorowej autoregresji o postaci:

$$\mathbf{y}_t^{(3)} = \mathbf{G}_0 + \sum_{i=1}^m \mathbf{G}_i \mathbf{y}_{t-3i}^{(3)} + \boldsymbol{\varepsilon}_t^{(y)} \quad (1)$$

gdzie $\mathbf{y}_t^{(3)}$ oznacza wektor zmiennych prognozowanych, a \mathbf{G}_i są macierzami parametrów.

Ponieważ dwie zmienne opisujące zatrudnienie dostarczały informacji o podobnym zakresie, uwzględnianie ich obu w modelu (1) przy krótkich próbach stosowanych do estymacji parametrów mogło prowadzić do zwiększenia błędów oszacowań parametrów i w konsekwencji zmniejszyć dokładność prognoz. W związku z tym jedną z nich wyłączano z modelu. Do prognozowania dynamiki wynagrodzeń i liczby pracujących w gospodarce narodowej zastosowano zatem jeden model, a do prognozowania dynamiki liczby pracujących według BAEL drugi model, w którym jako drugiej zmiennej użyto dynamiki wynagrodzeń.

W pracy wykorzystano dwie metody szacowania parametrów modeli autoregresyjnych: klasyczną metodę najmniejszych kwadratów oraz podejście bayesowskie. Wobec modelu w wersji bayesowskiej zastosowano zmodyfikowane podejście zaproponowane przez Doana, Littermanna i Simsa (1984). Założyli oni, że rozkład *a priori* estymowanych parametrów jest rozkładem normalnym z wartością oczekiwaną równą 1 dla parametrów stojących przy opóźnionych wartościach zmiennej objaśnianej w danym równaniu oraz 0 dla wszystkich pozostałych parametrów. Ponieważ prognozowane zmienne nie cechują się wysoką autokorelacją, w niniejszej pracy przyjęto, że wartość oczekiwana parametrów stojących przy opóźnionych wartościach zmiennej objaśnianej wynosi 0,25 (por. Bańbura, Giannone, Reichlin 2010). Z kolei odchylenie standardowe rozkładu *a priori* przyjmuje postać:

$$\sigma_{ijk} = \theta w_{ij} k^{-\phi} \frac{\hat{\sigma}_{uj}}{\hat{\sigma}_{ui}} \quad (2)$$

gdzie: i jest numerem równania, j – numerem zmiennej, k reprezentuje rząd opóźnienia, θ , ϕ oraz macierz $\mathbf{W} = [w_{ij}]$ są hiperparametrami, natomiast $\hat{\sigma}_{uj}$ oznacza oszacowanie odchylenia standardowego składnika losowego w jednowymiarowym modelu AR dla zmiennej j .

Hiperparametr $\theta > 0$ określa ogólnie wielkość odchylenia standardowego w całym rozkładzie *a priori*. Hiperparametr $0 \leq \phi \leq 1$ determinuje tempo zmniejszania się niepewności w rozkładzie *a priori* wraz ze wzrostem opóźnienia określonego przez m w modelu (1). Wskazuje zatem, że zmienne objaśniające w danym równaniu będą miały niewielki wpływ na zmienną objaśnianą. Elementy macierzy wag \mathbf{W} wskazują na większą niepewność co do wartości parametrów stojących przy opóźnionych zmiennych objaśnianych (elementy na głównej przekątnej macierzy) w stosunku do parametrów stojących przy zmiennych objaśniających (elementy poza główną przekątną). W pracy przyjęto standardowe wartości omawianych parametrów.

$$\theta = 0,1 \quad \phi = 1 \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & \cdots & 0,5 \\ 0,5 & 1 & \cdots & 0,5 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0,5 & 0,5 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Zarówno w podejściu klasycznym, jak i bayesowskim liczbę opóźnień m w modelu (1) dobierano ze względu na zdolności prognostyczne modelu.

3.2. Dynamiczne modele czynnikowe

Istotą dynamicznych modeli czynnikowych jest wykorzystanie w prognozowaniu zmiennych syntetycznych, reprezentujących informacje zawarte w dużych zbiorach danych (zob. Stock, Watson 1998). Procedurę prognozowania na podstawie modeli DFM można podzielić na trzy etapy:

- wyodrębnienie niezależnych zmiennych syntetycznych – czynników,
- ustalenie zależności pomiędzy czynnikami a zmienną prognozowaną,
- wykorzystanie oszacowanej zależności do budowy prognoz.

W niniejszej pracy na pierwszym z wymienionych etapów wykorzystano statyczną metodę głównych składowych. Jeżeli K jest liczbą zmiennych objaśniających, a T oznacza liczbę obserwacji, to macierz obserwacji zmiennych objaśniających \mathbf{X} ma wymiar $T \times K$. Poszukuje się macierzy czynników \mathbf{F} o wymiarze $T \times K$ oraz K -wymiarowej kwadratowej macierzy ładunków czynnikowych \mathbf{L} – takich, aby spełniona była zależność:

$$\mathbf{X} = \mathbf{FL} \quad (4)$$

Poszukiwane macierze dobierane są w taki sposób, aby czynniki reprezentowane przez kolumny macierzy \mathbf{F} były od siebie niezależne liniowo. Ponadto ustawiono je w takiej kolejności, że dany czynnik wyjaśnia mniejszy lub taki sam odsetek zmienności zmiennych objaśniających w porównaniu z poprzedzającym go czynnikiem.

Gdyby w macierzy \mathbf{X} nie występowały braki danych, rozwiązanie powyższego problemu sprowadzałoby się do stosunkowo prostych obliczeń z zakresu algebry. Ponieważ jednak brakuje niektórych obserwacji, konieczne jest ich uzupełnienie. W tym celu zastosowano procedurę maksymalizacji oczekiwań (zob. Stock, Watson 1998), która połączona jest z procesem estymacji macierzy \mathbf{F} oraz \mathbf{L} i ma charakter rekurencyjny. Początkowo przyjęto pewne startowe wartości macierzy $\mathbf{F}^{(0)}$ oraz $\mathbf{L}^{(0)}$ i na podstawie równania (1) oszacowano brakujące elementy macierzy \mathbf{X} . Korzystając z kompletnej macierzy \mathbf{X} , oszacowano macierze $\mathbf{F}^{(1)}$ oraz $\mathbf{L}^{(1)}$ przy zastosowaniu standardowej procedury algebraicznej. Postępowanie powtarza się do momentu, w którym różnice pomiędzy kolejnymi oszacowaniami $\mathbf{F}^{(i)}$ oraz $\mathbf{L}^{(i)}$ są mniejsze od założonej wartości granicznej. Dobre wartości początkowe można uzyskać przez zastosowanie zwykłej procedury głównych składowych do macierzy utworzonej z kompletnych wierszy macierzy \mathbf{X} .

Najpopularniejszą alternatywą wobec statycznej metody głównych składowych są metody dynamiczne, w których przyjmuje się zmienną strukturę zależności pomiędzy zmiennymi objaśniającymi a czynnikami lub rozszerza się macierz \mathbf{F} o opóźnione czynniki. Jak jednak dowodzą na przykład wyniki przedstawione w pracy Boivina i Ng (2005), wybór metody wyznaczania czynników nie ma większego wpływu na jakość generowanych prognoz, co potwierdzają również Baranowski, Leszczyńska i Szafranski (2010) w odniesieniu do polskiej gospodarki.

Podstawowy problem z ustalaniem zależności pomiędzy czynnikami a zmiennymi prognozowanymi w niniejszej pracy wynika z tego, że czynniki są obserwowane co miesiąc, a zmienne prognozowane raz na kwartał. Rozwiązanie tego problemu polega na wykorzystaniu faktu, że zmienne prognozowane

mierzy się jako logarytmy kwartalnych stóp wzrostu. Możliwa jest zatem specyfikacja liniowego równania opisującego zależność pomiędzy logarytmem miesięcznej stopy wzrostu zmiennej prognozowanej a czynnikami, a następnie agregacja tych równań i przejście do zależności pomiędzy logarytmem kwartalnej stopy wzrostu a czynnikami. Przyjęto, że $y_t^{(1)} = \ln(Y_t / Y_{t-1})$ oznacza logarytm miesięcznej stopy wzrostu zmiennej prognozowanej, $y_t^{(3)} = \ln(Y_t / Y_{t-3})$ mierzy zmiany kwartalne, \mathbf{f}_t to wektor k czynników, a równanie zależności pomiędzy $y_t^{(1)}$ a \mathbf{f}_t ma postać:

$$y_t^{(1)} = a_0 + a_1 y_{t-1}^{(1)} + \sum_{i=0}^{v_1} \mathbf{A}_i' \mathbf{f}_{t-i} + \varepsilon_t^{(1)} \quad (5)$$

gdzie: a_0 oraz a_1 są parametrami, \mathbf{A}_i – k -elementowymi wektorami parametrów, natomiast $\varepsilon_t^{(1)}$ jest składnikiem losowym

Zagregowane równanie prognostyczne kwartalnych stóp wzrostu przyjmuje wówczas następującą postać (wyprowadzenie wzoru znajduje się w Aneksie 2):

$$y_t^{(3)} = b_0 + b_1 y_{t-3}^{(3)} + \sum_{i=0}^{v_1} \mathbf{B}_i' \mathbf{Z}_{t-i} + \varepsilon_t^{(3)} \quad (6)$$

gdzie:

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{f}_t + \mathbf{f}_{t-1} + \mathbf{f}_{t-2}, \quad b_0 = 3a_0(1 + a_1 + a_1^2), \quad b_1 = a_1^3, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1 + a_1 \mathbf{A}_0,$$

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{A}_2 + a_1 \mathbf{A}_1 + a_1^2 \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{B}_{m-2} = \mathbf{A}_m + a_1 \mathbf{A}_{m-1} + a_1^2 \mathbf{A}_{m-2}, \quad \mathbf{B}_{m-1} = a_1 \mathbf{A}_m + a_1^2 \mathbf{A}_{m-1},$$

$$\mathbf{B}_m = a_1^2 \mathbf{A}_m,$$

$$\varepsilon_t^{(3)} = \varepsilon_t^{(1)} + (1 + a_1)\varepsilon_{t-1}^{(1)} + (1 + a_1 + a_1^2)\varepsilon_{t-2}^{(1)} + (1 + a_1 + a_1^2)\varepsilon_{t-3}^{(1)} + \dots + a_1(1 + a_1)\varepsilon_{t-m+1}^{(1)} + a_1^2\varepsilon_{t-m}^{(1)}$$

Możliwa jest również analiza modelu bez czynnika autoregresyjnego $y_{t-1}^{(1)}$. Wtedy oczywiście $a_1 = b_1 = 0$. Pod względem własności formalnych specyfikacja (3) niewiele się różni od podejścia, w którym modeluje się bezpośrednią zależność pomiędzy $y_t^{(3)}$ a \mathbf{f}_t . Potwierdzają to także symulacyjne badania własności prognostycznych obu rodzajów modeli. Wydaje się jednak, że opisane podejście jest poprawniejsze pod względem logicznym, gdyż zakłada związek pomiędzy miesięcznymi stopami wzrostu zmiennej prognozowanej a czynnikami obserwowanymi także z częstotliwością miesięczną.

Ze specyfikacją równania (6) wiąże się zagadnienie wyboru optymalnej liczby czynników k . Liczba ta musi być zdecydowanie mniejsza niż K czynników identyfikowanych przez procedurę głównych składowych. W literaturze proponuje się wiele kryteriów wyboru optymalnej liczby czynników, takich jak kryterium osypiska (Onatsky 2009), kryteria informacyjne (Bai, Ng 2002) oraz ich modyfikacje (Jacobs, Otter 2008; Alessi, Barigozzi, Capasso 2010). W niniejszej pracy zdecydowano się jednak na inne podejście. Wybór optymalnej liczby czynników połączono z wyborem najlepszej liczby opóźnień w modelu n_1 , przyjmując jako kryterium wyboru zdolność prognostyczną modelu mierzoną błędem średniokwadratowym prognoz wygasłych.

Podstawą wyznaczania prognoz było równanie (6). Aby je zastosować do celów prognostycznych, konieczna jest znajomość przyszłych wartości wektorów czynników w okresie prognozy. Do prognozowania tych wartości użyto standardowego modelu wektorowej autoregresji:

$$\mathbf{f}_t = \sum_{i=1}^{v_2} \mathbf{C}_i \mathbf{f}_{t-i} + \varepsilon_t^{(f)} \quad (7)$$

Parametry \mathbf{C}_i modelu (7), podobnie jak parametry modelu (6), szacowane były metodą najmniejszych kwadratów.

Aby wybrać najlepszy model DFM, trzeba określić trzy metaparametry: liczbę czynników k , liczbę dodatkowych opóźnień v_1 oraz liczbę opóźnień v_2 w modelu VAR dla czynników (7). Ponadto należy podjąć decyzję dotyczącą uwzględnienia części autoregresyjnej w równaniu (6). Optymalna kombinacja tych parametrów była wybierana łącznie, przez wskazanie modelu z najmniejszym błędem średniokwadratowym wygasłych prognoz na jeden kwartał poza próbę. Wyboru dokonywano dla następującego zbioru możliwych wartości parametrów: $k = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $v_1 = \{0, 1\}$, $v_2 = \{1, 2, 3\}$. Biorąc pod uwagę także binarny parametr dotyczący części autoregresyjnej modelu (6), łącznie analizowano 60 modeli.

3.3. Modele wskaźników wyprzedzających

Wskaźniki wyprzedzające to zmienne, których zmiany w okresie t pozwalają prognozować kształtowanie się badanych zmiennych. W literaturze można wyróżnić dwa zasadnicze nurty badań w tym zakresie. W pierwszym wskaźnikami wyprzedzającymi są najczęściej pojedyncze zmienne ekonomiczne (zob. Estrella, Mishkin 1998; McGuckin, Ozyildirim, Zarnowitz 2000). W drugim podejściu jako wskaźniki wyprzedzające stosowane są zmienne syntetyczne, będące kombinacjami wielu innych zmiennych (zob. Bai, Ng 2008). Ponieważ to drugie podejście w istocie nie różni się od metod czynnikowych, w niniejszej pracy wybrano podejście tradycyjne.

Do prognozowania wykorzystywano modele o postaci:

$$y_{t+3h}^{(3)} = d_{0h} + d_{1h} y_t^{(3)} + d_{2h} x_{1t} + d_{3h} x_{2t} + \varepsilon_{t+3h} \quad (8)$$

gdzie x_1 oraz x_2 oznaczają główne zmienne, opisane w tabeli 1, d_{ih} są szacowanymi parametrami, natomiast ε_{t+3h} jest składnikiem losowym.

Powyższe modele szacowano oddzielnie dla każdego rozpatrywanego horyzontu prognoz, stosując standardową metodę najmniejszych kwadratów.

Procedura selekcji głównych zmiennych przebiegała dwuetapowo. Najpierw ze zbioru wszystkich potencjalnych zmiennych objaśniających wybrano te, co do których podejrzewano, że mogą mieć charakter wskaźników wyprzedzających. Zmienne te wskazano w tabeli 5 z Aneksu 1 (kolumna LI). Były to przede wszystkim syntetyczne wskaźniki wyprzedzające, miesięczne zmienne opisujące dynamikę rynku pracy oraz zmienne finansowe, takie jak indeks WIG, stopa WIBOR czy kurs EUR/PLN. Następnie analizowano własności prognostyczne możliwych dwuelementowych kombinacji tych zmiennych. Ostatecznie do opracowania prognoz wybierano te, które dawały najmniejsze błędy średniokwadratowe

na jeden kwartał poza próbę. Dodatkowe badania symulacyjne wskazały, że rozszerzanie równania (8) o opóźnione realizacje głównych zmiennych nie prowadziło do istotnego zwiększenia zdolności prognostycznych modeli.

Można zauważyć, że w większości przypadków wybrane pary głównych wskaźników miały podobny charakter. Jedną ze zmiennych opisywała rynek pracy – miesięczne zatrudnienie lub wynagrodzenia w sektorze przedsiębiorstw. Drugą natomiast był syntetyczny wskaźnik wyprzedzający.

3.4. Prognozy łączone

Punktem wyjścia do tworzenia prognoz łączonych były prognozy uzyskane za pomocą najlepszych czterech modeli z każdej omówionej powyżej grupy. W najprostszym przypadku wszystkie prognozy miały równe wagi. Biorąc pod uwagę jakość prognoz częściowych, badano także jakość prognoz łączonych, w których nie uwzględniano modeli VAR oraz BVAR. Uzyskane wyniki porównywano z prognozami otrzymanymi przy zastosowaniu optymalnych wag *ex post*. Dzięki temu można było ocenić, na ile wyniki uzyskane przy zastosowaniu równych wag odbiegają od najlepszego wyniku, który można byłoby osiągnąć w danej próbie, optymalnie dobierając wagi.

Wagi optymalne były wyznaczane w następujący sposób. Ponieważ jako kryterium jakości prognoz wykorzystano błąd średniokwadratowy prognoz wygasłych na jeden kwartał poza próbę, więc poszukiwano takich prognoz $Y_{tp}^{(3)}$, by:

$$\sum_{t=R+1}^{R+P} \left(Y_t^{(3)} - Y_{tp}^{(3)} \right)^2 \rightarrow MIN \quad (9)$$

gdzie R oznacza długość próby, na podstawie której szacowano parametry modeli, a P jest długością okresu weryfikacji prognoz.

Prognoza łączona jest kombinacją liniową prognoz składowych $Y_{tpi}^{(3)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, więc problem (9) można też przedstawić jako:

$$\sum_{t=R+1}^{R+P} \left(Y_t^{(3)} - w_1 Y_{tp1}^{(3)} - w_2 Y_{tp2}^{(3)} - w_3 Y_{tp3}^{(3)} - w_4 Y_{tp4}^{(3)} \right)^2 \rightarrow MIN \quad (10)$$

gdzie w_i reprezentują wagi.

Rozwiązanie problemu (10) jest tożsame ze znalezieniem ocen parametrów liniowego modelu ekonometrycznego bez wyrazu wolnego, w którym jako wartości zmiennej objaśnianej występują rzeczywiste realizacje zmiennej prognozowanej, a jako zmienne objaśniające – prognozy uzyskane różnymi metodami. Innymi słowy wagi dobierane były w taki sposób, by przy danych prognozach częściowych błąd średniokwadratowy prognoz wygasłych był jak najmniejszy.

4. Metodologia badania

4.1. Schemat prognostyczny

Podstawą oceny zdolności prognostycznych rozważanych modeli był błąd średniokwadratowy prognoz wygasłych dla horyzontu $\tau = 1, 2, 3, 4$ kwartały. Kryterium to jest bardzo popularne i stosowane w wielu opracowaniach. Wyniki prezentowane w niniejszej pracy dotyczą rolowanego schematu prognozowania (ang. *rolling scheme*), w którym liczba obserwacji wykorzystywanych do szacowania parametrów modeli jest stała i oznaczana przez R . Wydaje się, że takie podejście jest bardziej uzasadnione od schematu rekursywnego (ang. *recursive scheme*) ze zwiększającą się liczebnością próby estymacyjnej ze względu na ciągle zmiany strukturalne zachodzące w polskiej gospodarce. Badania, których wyniki przedstawiono w podrozdziale 5.4, wskazały, że stosowanie schematu rekursywnego w większości przypadków nie prowadziło do istotnego zmniejszania się błędów prognoz.

Z powodu niewielkiej liczby obserwacji prognozowanych zmiennych rozważano próby estymacyjne liczące 20 oraz 30 obserwacji kwartalnych, czyli liczba obserwacji miesięcznych wynosiła $R = 60$ oraz $R = 90$. W pierwszym przypadku ocena prognoz obejmowała okres od II kwartału 2004 do II kwartału 2013 r., w drugim natomiast okres od IV kwartału 2006 do II kwartału 2013 r. W przypadku krótszych prób estymacyjnych liczba postawionych prognoz była równa $P = 102$, a dla prób dłuższych $P = 72$. Poszczególne próby tworzono zawsze z zachowaniem struktury dostępnych informacji na końcu próby w danym momencie, za każdym razem cofając się o jeden miesiąc. Uwzględniano też relację pomiędzy dostępnością danych miesięcznych oraz kwartalnych. W zależności od miesiąca dostępne były dane z jednego, dwóch lub trzech miesięcy z kwartału następującego po ostatnim kwartale, z którego pochodziły dostępne dane o zmiennych prognozowanych. Można więc powiedzieć, że dane miesięczne wyprzedzały dane kwartalne o jeden, dwa lub trzy miesiące. Takie podejście miało na celu odwzorowanie rzeczywistej sytuacji, z którą ma do czynienia badacz opracowujący prognozy w każdym miesiącu.

Należy jeszcze zaznaczyć, że najlepsze modele z każdej grupy były wybierane ze względu na błąd średniokwadratowy prognoz na jeden kwartał do przodu.

4.2. Testy zdolności prognostycznych

Do badania istotności zaobserwowanych różnic między zdolnościami prognostycznymi stosowano test Diebolda i Mariano (Diebold, Mariano 1995) oraz test warunkowej zdolności prognostycznej CPA (ang. *conditional predictive ability*) opracowany przez Giacomini i White'a (2006). Poniżej krótko omówiono drugi z testów, który stanowi uogólnienie testu Diebolda i Mariano.

Test CPA umożliwia warunkowe porównywanie zdolności prognostycznych dwóch modeli, z uwzględnieniem dodatkowych informacji dostępnych w momencie budowy prognoz. Pozwala więc odpowiedzieć na pytanie, czy po wprowadzeniu określonej informacji dodatkowej jeden z modeli rzeczywiście będzie generował lepsze prognozy.

Jeżeli przez $\Delta L_{\tau t}$ oznaczyć różnicę między kwadratami błędów prognoz wygasłych o horyzontie τ , uzyskanych za pomocą dwóch różnych modeli w okresie t , natomiast przez \mathbf{H}_t – h -elementowy wektor informacji dodatkowej dostępnej w momencie formułowania prognoz, to statystyka testowa testu CPA przyjmuje postać:

$$\chi^2 = P\bar{\mathbf{Z}}'\hat{\mathbf{\Omega}}^{-1}\bar{\mathbf{Z}} \quad (11)$$

gdzie $\bar{\mathbf{Z}} = \frac{1}{P} \sum_{t=R+1}^{R+P} \Delta L_{it} \mathbf{H}_t$, natomiast $\hat{\mathbf{\Omega}}$ oznacza oszacowanie macierzy kowariancji wektorów o postaci $\Delta L_{it} \mathbf{H}_t$, uzyskane metodą Neweya i Westa.

Asymptotycznie, przy dużej liczbie porównywanych prognoz ($P \rightarrow \infty$), statystyka testowa ma rozkład χ^2 z h stopniami swobody. W przypadku braku warunkowej informacji dodatkowej $\mathbf{H}_t = 1$. Wtedy też test CPA jest tożsamy z testem Diebolda i Mariano. Test Giacomini'ego i White'a może być stosowany w przypadku rolowanego schematu prognozowania. Dla schematu rekursywnego asymptotyczny rozkład statystyki testowej nie jest znany. W takiej sytuacji do wyznaczenia wartości krytycznych testu można wykorzystać metody bootstrapowe. Test bezwarunkowy wskazuje, które podejście generowało dokładniejsze prognozy. Można więc uznać, że powinno także wskazywać, które podejście będzie lepsze w pewnym, bliżej nieokreślonym momencie w przyszłości. Test względny odpowiada natomiast na pytanie, czy na podstawie innych informacji dostępnych w próbie, poza średnią jakością prognoz wygłaszanych, można wskazać podejście, które będzie generowało prognozy lepsze w określonych warunkach.

4.3. Wpływ sekwencyjnego odsezonowania zmiennych

Należy zaznaczyć, że w pracy każdorazowo nie dokonywano odsezonowania szeregów czasowych, lecz badano szereg już wcześniej pozbawiony sezonowości. Pod tym względem badanie różniło się od rzeczywistych sytuacji. Sekwencyjne dodawanie kolejnych obserwacji zmienia nieco wartości odsezonowanych obserwacji, co może wpływać na zdolności prognostyczne omawianych metod.

Aby ocenić skalę wahań wartości obserwacji w wyniku sekwencyjnego odsezonowania szeregów, przeprowadzono następującą analizę. Dla każdej zmiennej dokonywano sekwencyjnego odsezonowania, za każdym razem dodając na końcu próby jedną obserwację. Stosowano procedurę TRAMO/SEATS z automatyczną identyfikacją modeli (RSA = 4; zob. Gomez, Maravall 1998). Następnie każdy odsezonowany szereg sprowadzono do postaci stacjonarnej oraz zestandaryzowano. W rezultacie dla każdej zmiennej i oraz obserwacji t uzyskano L_{it} wartości z usuniętą sezonowością. Liczba ta zależy od tego, jaką długość ma cały szereg i jaką pozycję zajmuje w nim dana obserwacja. W zasadzie im późniejsza obserwacja, tym mniej obliczano dla niej wartości odsezonowanych. W dalszej kolejności dla każdej obserwacji wyznaczano maksymalną różnicę:

$$m_{1it} = \max_l X_{it}^{(l)} - \min_l X_{it}^{(l)}, l = 1, 2, \dots, L_{it} \quad (12)$$

oraz odchylenie standardowe:

$$m_{2it} = \sqrt{\frac{1}{L_{it}} \sum_{l=1}^{L_{it}} (X_{it}^{(l)} - \bar{X}_{it})^2}, \bar{X}_{it} = \frac{1}{L_{it}} \sum_{l=1}^{L_{it}} X_{it}^{(l)} \quad (13)$$

Na koniec dla każdej zmiennej wyznaczono maksymalną wartość m_{1it} oraz średnią wartość m_{2it} :

$$m_{1i} = \max_i m_{1it} \quad m_{2i} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T m_{2it} \quad (14)$$

Miary te wskazują więc maksymalną różnicę oraz średnie odchylenie standardowe poszczególnych obserwacji spowodowane sekwencyjnym odsezonowaniem, mierzone w stosunku do odchylenia standardowego szeregu odsezonowanego, pozbawionego trendu oraz zestandaryzowanego.

5. Wyniki

5.1. Przeciętna dokładność prognoz

W tabeli 2 przedstawiono błędy średniokwadratowe, wyrażone w punktach procentowych, prognoz wygasłych uzyskanych za pomocą najlepszych modeli z każdej badanej grupy. Liczba gwiazdek przy wynikach wskazuje, w ilu porównaniach parami za pomocą testu Diebolda i Mariano dany model okazał się istotnie lepszy od modelu konkurencyjnego. Analizując przedstawione wyniki, można zauważyć kilka prawidłowości. Po pierwsze, w przypadku horyzontu τ wynoszącego jeden kwartał największą dokładnością cechowały się zawsze prognozy łączone z modeli DF oraz LI. W odniesieniu do dynamiki liczby pracujących w gospodarce narodowej oraz liczby pracujących według BAEL przewaga prognoz łączonych nad wszystkimi innymi modelami była istotna statystycznie. Wniosek ten dotyczy również dłuższych horyzontów dla tych dwóch zmiennych przy krótszych próbach estymacyjnych, liczących 60 obserwacji. W tabeli 2 nie przedstawiono wyników prognoz łączonych dla wszystkich czterech grup modeli, gdyż prawie we wszystkich analizowanych przypadkach cechowały się większymi błędami w porównaniu z prognozami łączonymi uwzględniającymi tylko modele DF oraz LI.

Jednocześnie rozpatrując w dalszym ciągu horyzont jednego kwartału, można zauważyć, że modele autoregresyjne VAR i BVAR wypadały gorzej od modeli DF oraz LI, przy czym nie we wszystkich przypadkach różnica ta była statystycznie istotna. Jedynie prognozy dynamiki wynagrodzeń uzyskane za pomocą modeli autoregresyjnych przy próbach liczących 60 obserwacji były nieco lepsze od prognoz najlepszego z modeli czynnikowych. Przewagę modeli DF oraz LI nad modelami autoregresyjnymi obserwowano także w przypadku większości dłuższych horyzontów prognoz.

Powyższe obserwacje spowodowały, że przy łączeniu prognoz brano pod uwagę jedynie modele DF oraz LI. Słuszność tej decyzji potwierdza porównanie błędów prognoz generowanych za pomocą modeli łączonych DF + LI i modeli łączonych z optymalnymi wagami *ex post* (JO OPT). Poza przypadkiem wskazanym w poprzednim akapicie różnice te nie przekraczały jednego punktu bazowego. Branie pod uwagę tylko modeli DF oraz LI przy łączeniu prognoz okazało się więc wyborem zbliżonym do optymalnego.

Rezultaty porównań modeli DF z LI okazały się niejednoznaczne. Przykładowo w prognozowaniu dynamiki wynagrodzeń przy krótszych próbach lepiej sprawdzały się modele LI. Z kolei w przypadku dłuższych prób większą dokładnością charakteryzowały się modele DF. Ponadto w prognozowaniu liczby pracujących w gospodarce narodowej lepsze wyniki dawały modele DF, a w odniesieniu do liczby pracujących – modele LI. Również porównywanie modeli VAR z BVAR dawało niejednoznaczne wnioski. Można jedynie zauważyć, że najlepsze prognozy generowane były przez modele VAR z niewielką liczbą opóźnień, tymczasem w odniesieniu do modeli BVAR korzystniejsze było ich rozbudowanie.

5.2. Warunkowa dokładność prognoz

Rezultaty przedstawione w poprzednim podpunkcie są wynikami uśrednionymi. Aby zbadać warunkową dokładność prognoz, przeprowadzono dwa ćwiczenia. Na wykresach 3–5 przedstawiono kształtowanie się w czasie błędów absolutnych prognoz dla poszczególnych modeli przy próbach estymacyjnych liczących 60 obserwacji. W celu uzyskania większej czytelności błędy wygładzono, obliczając pięciopokresowe średnie ruchome. Mimo to trudno wysnuć jednoznaczne wnioski. Można zauważyć, że błędy wygładzone są dość silnie skorelowane, przy czym w ostatnich dwóch latach zróżnicowanie dokładności prognoz było niewielkie, co prawdopodobnie ma związek ze zmniejszeniem się wahań zmiennych prognozowanych w tym okresie. W przypadku prognozowania dynamiki liczby pracujących w gospodarce narodowej oraz liczby pracujących według BAEL widać, że w początkowym okresie weryfikacji prognoz modele LI zwykle cechowały się najmniejszą dokładnością, która z czasem stopniowo się poprawiała.

Aby zbadać, czy istnieje zależność pomiędzy odmiennymi zdolnościami prognostycznymi poszczególnych modeli a wartościami zmiennych prognozowanych, przeprowadzono testy warunkowych zdolności prognostycznych Giacomini'ego i White'a, gdzie jako zmienną instrumentalną przyjęto zmienne prognozowane. Zamierzano zidentyfikować pary modeli, które różniły się warunkowymi zdolnościami prognostycznymi w taki sposób, że przy wysokich wartościach zmiennej prognozowanej jeden z modeli dawał prognozy obarczone mniejszym błędem niż drugi, a przy niskich wartościach badanej zmiennej zachodziła sytuacja odwrotna. Poszukiwano przypadków, w których test CPA wskazywał na statystycznie istotne różnice, natomiast test Diebolda i Mariano nie wykazywał istotnych różnic. Biorąc pod uwagę dwie różne długości prób, cztery horyzonty prognoz oraz wszystkie możliwe pary modeli, dla dynamiki wynagrodzeń zidentyfikowano łącznie siedem takich przypadków, natomiast dla liczby pracujących w gospodarce narodowej i pracujących według BAEL było to, odpowiednio, osiem oraz pięć przypadków.

Aby dodatkowo ocenić siłę obserwowanych zależności, liczone kwadraty wartości współczynników korelacji liniowej Pearsona pomiędzy zmiennymi prognozowanymi a różnicami kwadratów błędów predykcji dla danej pary modeli. W żadnym przypadku nie przekraczały one 0,15. Szczegółowe wyniki zawiera tabela 6. Należy dodać, że nawet gdy analizowano wszystkie statystycznie istotne różnice między warunkowymi zdolnościami prognostycznymi niezależnie od rezultatów testu Diebolda i Mariano, współczynniki nie były dużo wyższe. Można więc stwierdzić, że różnice te występowały rzadko i były niewielkie.

5.3. Dokładność prognoz a napływ nowych danych miesięcznych

Aby ocenić, czy napływ nowych danych miesięcznych poprawia zdolności prognostyczne modeli, analizowano przeciętną dokładność prognoz osobno dla trzech możliwych wartości wyprzedzeń danych miesięcznych względem danych kwartalnych. Wyniki badań znajdują się w tabelach 7–9. Widać, że różnice pomiędzy modelami przy różnej liczbie wyprzedzeń są bardzo niewielkie. Świadczy to, że napływ nowych danych miesięcznych nie prowadził do poprawy zdolności prognostycznych analizowanych modeli.

Należy zaznaczyć, że przedstawione wyniki dotyczą modeli najlepszych z punktu widzenia zdolności prognostycznych dla wszystkich wyprzedzeń łącznie, a więc tych samych modeli, co w tabeli 2. Powyższy wniosek nie zmieniłby się jednak, gdyby do porównań wzięto modele dające najlepsze prognozy dla danego wyprzedzenia.

5.4. Schemat rolowany czy schemat rekursywny?

W tabeli 3 zestawiono średnie błędy prognoz uzyskane przy zastosowaniu rekursywnego schematu prognozowania. Porównując je z wynikami zawartymi w tabeli 2, trudno sformułować jednoznaczną odpowiedź na pytanie postawione w tytule podrozdziału. Widać jedynie, że schemat rekursywny wyraźnie poprawiał zdolności prognostyczne modeli VAR. Poprawa ta nastąpiła prawie we wszystkich analizowanych przypadkach. Można także zauważyć również, że gdy prognozowano dynamikę wynagrodzeń za pomocą schematu rolowanego z próbą $R = 60$ obserwacji, wszystkie metody generowały mniej dokładne prognozy, niż gdy stosowano schemat rekursywny. Z drugiej jednak strony, jeśli by brać pod uwagę prognozy na jeden kwartał do przodu uzyskane za pomocą najlepszych modeli łączonych (DF + LI), to poza wspomnianym powyżej przypadkiem schemat rolowany dawał lepsze wyniki bądź takie same.

5.5. Długość prób a dokładność prognoz

Gdy ocenia się, jak długość próby estymacyjnej w schemacie rolowanym wpływa na jakość prognoz, nie można bezpośrednio porównywać rezultatów zestawionych w tabeli 2. Odmienne były bowiem okresy weryfikacji prognoz dla prób liczących 60 oraz 90 obserwacji miesięcznych. W celu zapewnienia porównywalności prognozy wyznaczane na podstawie krótszych prób poddano ocenie w tym samym okresie, jaki stosowano przy próbach dłuższych. Wyniki takich analiz przedstawiono w tabeli 4.

Wyraźną różnicę w dokładności prognoz widać jedynie w przypadku dynamiki wynagrodzeń. Wszystkie modele generowały tu dokładniejsze prognozy, jeżeli do oszacowania ich parametrów wykorzystano dłuższe próby. W przypadku dwóch pozostałych zmiennych zróżnicowanie dokładności prognoz nie jest już tak wyraźne. Warto jednak odnotować, że prognozy otrzymywane za pomocą modeli łączonych DF + LI prawie zawsze były dokładniejsze, gdy stosowano dłuższe próby.

5.6. Wahania spowodowane sekwencyjnym odsezonowaniem zmiennych

W tabeli 6 dla każdej zmiennej zestawiono wartości statystyk m_1 oraz m_2 , oceniających poziom wahań poszczególnych obserwacji występujących w wyniku sekwencyjnego odsezonowania zmiennych. Można zauważyć, że zastosowana procedura eliminacji wahań sezonowych przy dodawaniu kolejnych obserwacji na końcach szeregów w niektórych przypadkach powodowała dość duże wahania wartości poszczególnych obserwacji. Maksymalne różnice między wartościami większości zmiennych przekraczały odchylenie standardowe szeregu, czasami nawet kilkakrotnie. Jednocześnie wahania średnie stanowiły zwykle około kilkunastu procent wahań badanej zmiennej, co należy uznać za wynik umiarkowany.

Wahania zmiennych prognozowanych były nieco wyższe niż większości omawianych zmiennych. Maksymalne różnice przekraczały trzykrotność standardowych odchyłeń szeregów, a uśrednione stanowiły około 20% zmienności.

Powyższe rezultaty wskazują, że przyjęta metoda oraz sekwencyjność odsezonowania szeregów wywołują ich wahania, których nie można ignorować. Na podstawie przeprowadzonych analiz trudno jednak ocenić, jaki jest wpływ tych czynników na zdolności prognostyczne rozpatrywanych modeli. W tym zakresie potrzebne są dalsze badania.

6. Podsumowanie

W artykule analizowano dokładność prognoz wybranych zmiennych charakteryzujących rynek pracy w Polsce w latach 1998–2013. Zastosowano modele wektorowej autoregresji VAR, bayesowskie modele VAR, dynamiczne modele czynnikowe, modele wskaźników wyprzedzających oraz metody łączenia prognoz.

Na podstawie przeprowadzonych analiz można uznać, że w badanym okresie prognozy łączone uzyskane za pomocą modeli czynnikowych oraz modeli wskaźników wyprzedzających cechowały się największą dokładnością mierzoną błędem średniokwadratowym prognoz wygasłych. Ponadto prognozy uzyskane w wyniku zastosowania indywidualnych modeli czynnikowych oraz wskaźników były dokładniejsze niż prognozy wygenerowane przez modele wektorowej autoregresji. Wyniki badań nie potwierdzają jednak prawdziwości hipotezy, że wraz z napływem kolejnych danych miesięcznych wzrasta dokładność prognoz na dany kwartał uzyskiwanych za pomocą modeli wskaźników wyprzedzających oraz dynamicznych modeli czynnikowych.

Dodatkowo pokazano, że rodzaj schematu prognozowania oraz długość prób służących do estymacji parametrów nie miały dużego wpływu na zdolności prognostyczne analizowanych modeli w przypadku dynamiki liczby pracujących. Prognozy dynamiki zatrudnienia uzyskane na podstawie krótszych prób z zastosowaniem schematu rolowanego były wyraźnie mniej dokładne od pozostałych. W schemacie rolowanym mniejsza była także dokładność prognoz sporządzanych za pomocą modeli VAR.

Powyższe wnioski sformułowano, porównując średnie błędy prognoz w całym rozpatrywanym okresie. Jednocześnie nie zauważono, by relatywne zdolności prognostyczne modeli z poszczególnych grup wyraźnie zmieniły się w czasie lub zależały od poziomu zmiennych prognozowanych. Zaobserwowano jedynie, że w ostatnich dwóch latach zdolności prognostyczne analizowanych modeli cechowały się mniejszym zróżnicowaniem.

Bibliografia

- Alessi L., Barigozzi M., Capasso M. (2010), Improved penalization for determining the number of factors in approximate factor models, *Statistics and Probability Letters*, 80(23–24), 1806–1813.
- Angelini E., Camba-Mendez G., Giannone D., Runstler G., Reichlin L. (2011), Short-term forecasts of euro area GDP growth, *Econometrics Journal*, 41(1), C25–C44.
- Bai J., Ng S. (2002), Determining the number of factors in approximate factor models, *Econometrica*, 70(1), 191–221.

- Bai J., Ng S. (2008), Forecasting economic time series using targeted predictors, *Journal of Econometrics*, 146, 304–317.
- Banerjee A., Marcellino M., Masten I. (2005), Leading indicators for euro-area inflation and GDP growth, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 67, Supplement, 785–813.
- Bañbura M., Giannone D., Reichlin L. (2010), Large Bayesian vector auto regressions, *Journal of Applied Econometrics*, 25(1), 71–92.
- Baranowski P., Leszczyńska A., Szafranski G. (2010), Krótkookresowe prognozowanie inflacji z użyciem modeli czynnikowych, *Bank i Kredyt*, nr 41(4), 28–44.
- Barhoumi K., Benk S., Cristadoro R., Den Reijer A., Jakaitiene A., Jelonek P., Rua A., Ruth K., Van Nieuwenhuyze C., Runstler G. (2008), *Short-term forecasting of GDP using large monthly datasets: a pseudo real-time forecast exercise*, Working Paper Research, 133, National Bank of Belgium.
- Boivin J., Ng S. (2005) Understanding and comparing factor-based forecasts, *International Journal of Central Banking*, 1(3), 117–151.
- Boivin J., Ng S. (2006), Are more data always better for factor analysis? *Journal of Econometrics*, 132(1), 169–194.
- Christoffel K., Warne A., Coenen G. (2010), *Forecasting with DSGE models*, ECB Working Paper Series, 1185.
- Cichocki S., Saczuk K., Strzelecki P., Tyrowicz J., Wyszynski R. (2013), *Kwartalny raport o rynku pracy – I kwartał 2013 r.*, Narodowy Bank Polski, Warszawa.
- Diebold F.X., Mariano R.S. (1995), Comparing predictive accuracy, *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(3), 253–263.
- Doan T., Litterman R., Sims C. (1984), Forecasting and conditional projections using a realistic prior distribution, *Econometric Reviews*, 3, 1–100.
- Eickmeier S., Ziegler C. (2008), How successful are dynamic factor models at forecasting output and inflation? A meta-analytic approach, *Journal of Forecasting*, 27(3), 237–265.
- Estrella A., Mishkin F.S. (1998), Predicting U.S. recessions: financial variables as leading indicators, *The Review of Economics and Statistics*, 80(1), 45–61.
- Giacomini R., White H. (2006), Tests of conditional predictive ability, *Econometrica*, 74(6), 1545–1578.
- Giannone D., Reichlin L., Small D. (2008), Nowcasting: the real-time informational content of macroeconomic data, *Journal of Monetary Economics*, 55(4), 665–676.
- Gomez V., Maravall A. (1998), *Programs TRAMO and SEATS. Instructions for the user*, <http://www.bde.es/f/webbde/SES/servicio/software/tramo/manualdos.pdf>.
- Gupta R., Kabundi A., Miller S., Uwilingiye J. (2011), *Using large data sets to forecast sectoral employment*, Working Papers, 2011-02, University of Connecticut, Department of Economics.
- GUS (2008), *Zasady metodyczne statystyki rynku pracy i w wynagrodzeń*, Główny Urząd Statystyczny, Warszawa.
- GUS (2010), *Zatrudnienie i w wynagrodzenia w gospodarce narodowej w I kwartale 2010, Informacje i opracowania statystyczne GUS*, Warszawa.
- GUS (2013), *Aktywność ekonomiczna ludności Polski. I kwartał 2013*, Główny Urząd Statystyczny, Warszawa.
- Jacobs J., Otter P. (2008), Determining the number of factors and lag order in dynamic factor models: a minimum entropy approach, *Econometric Reviews*, 26(4–6), 385–397.

- Koop G., Korobilis D. (2011), UK macroeconomic forecasting with many predictors: Which models forecast best and when do they do so?, *Economic Modelling*, 28(5), 2307–2318.
- Marcellino M., Stock J.H., Watson M.W. (2003), Macroeconomic forecasting in the euro area: country specific versus area-wide information, *European Economic Review*, 47(S1), 755–783.
- McGuckin R.H., Ozyildirim A., Zarnowitz V. (2000), *The composite index of leading economic indicators: How to make it more timely*, Economics Program Working Paper Series, #08-01, The Conference Board, <http://www.conference-board.org/economics>.
- Onatsky A. (2009), Testing hypothesis about the number of factors in large factor models, *Econometrica*, 77(5), 1447–1479.
- Rapach D.E., Strauss J.K. (2008), Forecasting US employment growth using forecast combining methods, *Journal of Forecasting*, 27(1), 75–93.
- Rapach D.E., Strauss J.K. (2012), Forecasting US state-level employment growth: an amalgamation approach, *International Journal of Forecasting*, 28(2), 315–327.
- Siliverstovs B. (2013), Do business tendency surveys help in forecasting employment?: A real-time evidence for Switzerland, *OECD Journal: Journal of Business Cycle Measurement and Analysis*, DOI 10.1787/jbcma-2013-5k4bxxjkd32.
- Stock J.H., Watson M.W. (1998), *Diffusion indexes*, NBER Working Papers, 6702.
- Stock J.H., Watson M.W. (1999), Forecasting inflation, *Journal of Monetary Economics*, 44(2), 293–335.

Podziękowania

Autorzy składają podziękowania wszystkim uczestnikom seminarium NBP, na którym prezentowane były wstępne wyniki badań, jak również dwóm anonimowym Recenzentom za cenne uwagi oraz wskazówki, które przyczyniły się do znaczącej poprawy wcześniejszych wersji pracy.

Accuracy of selected forecasting methods for wages and employment in Poland

Summary

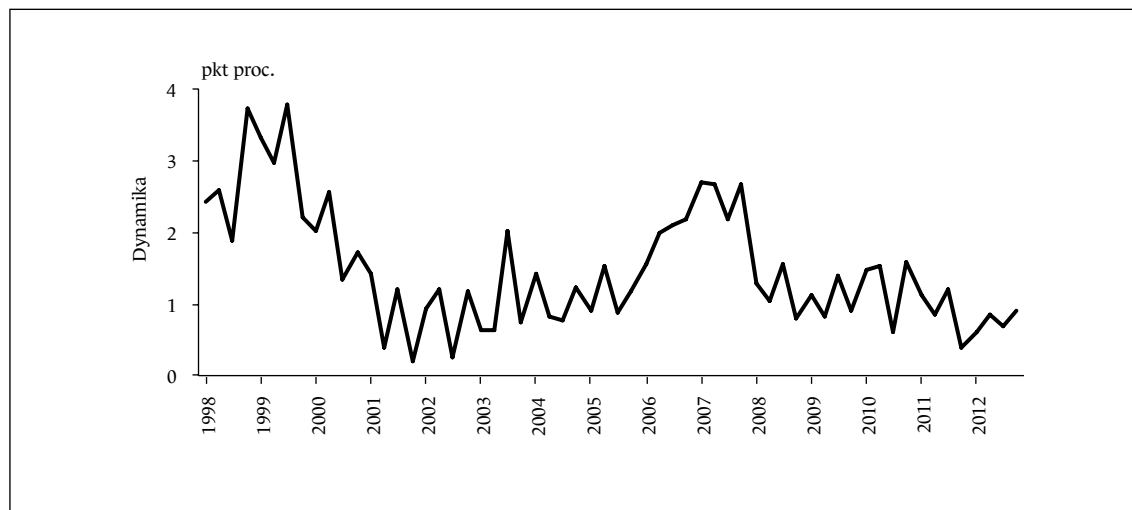
The aim of the paper is to analyse accuracy of selected methods used for forecasting variables describing labour market in Poland in years 1998–2013. We focus on quarterly data on employment in national economy published by National Statistical Office, employment according to the Labour Force Survey and average monthly wages and salaries in national economy. We compare classical and Bayesian VAR models, dynamic factor models, leading indicators as well as combined methods. The results show that for the most cases the best forecasts in terms of mean square errors were generated by averaging forecasts from factor models and leading indicator models. The individual models from these two classes outperform autoregression models. Moreover we find no evidence that availability of more recent monthly data in a given quarter improves forecasting abilities of the methods for that quarter.

Keywords: forecasting, job market, dynamic factor models, leading economic indices, pooled forecasts

Aneks 1

Wykres 1

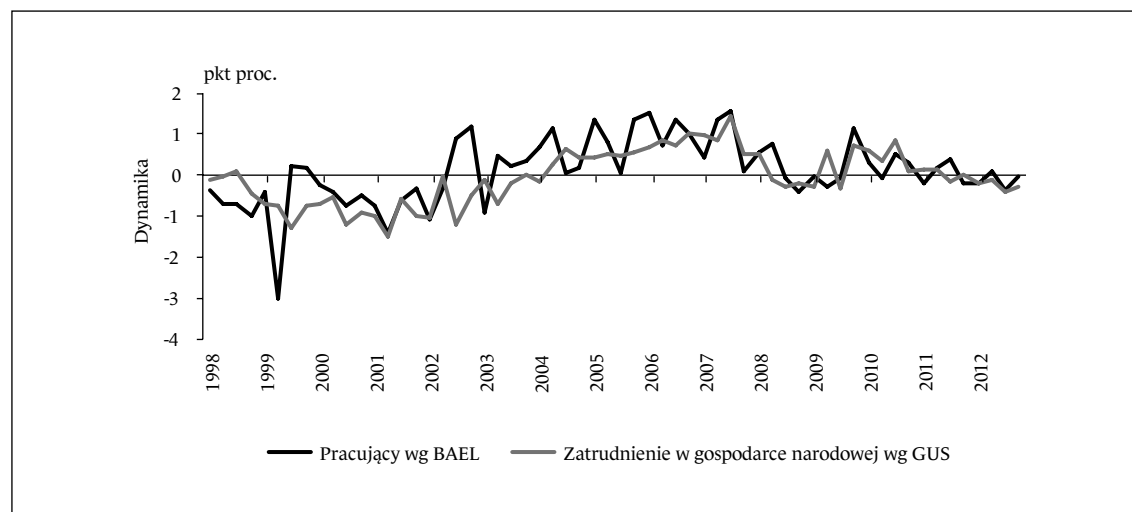
Kwartalna dynamika wynagrodzeń w gospodarce narodowej według GUS



Źródło: opracowanie na podstawie danych GUS.

Wykres 2

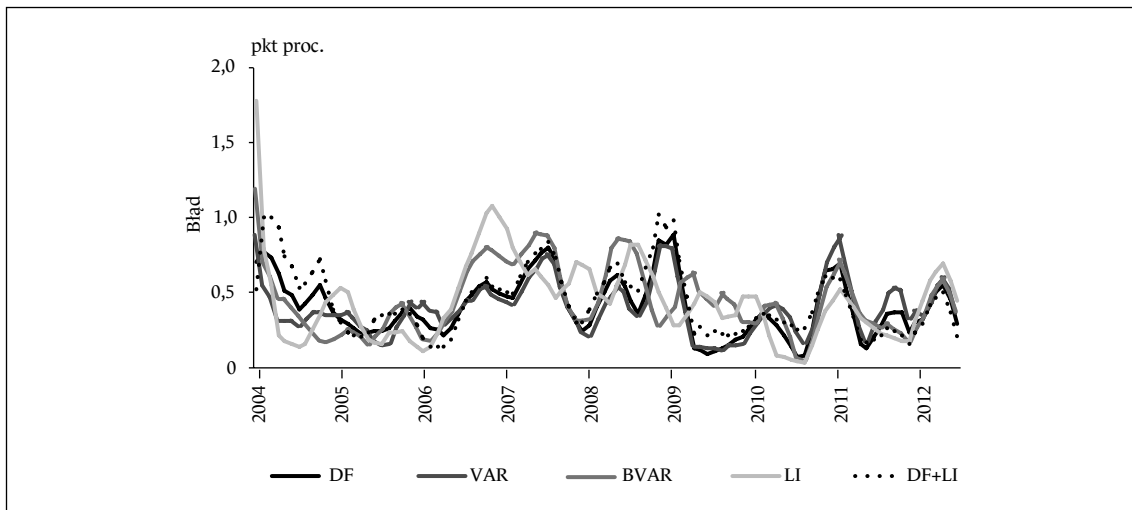
Kwartalna dynamika pracujących wg BAEL i pracujących w gospodarce narodowej według GUS



Źródło: opracowanie na podstawie danych GUS.

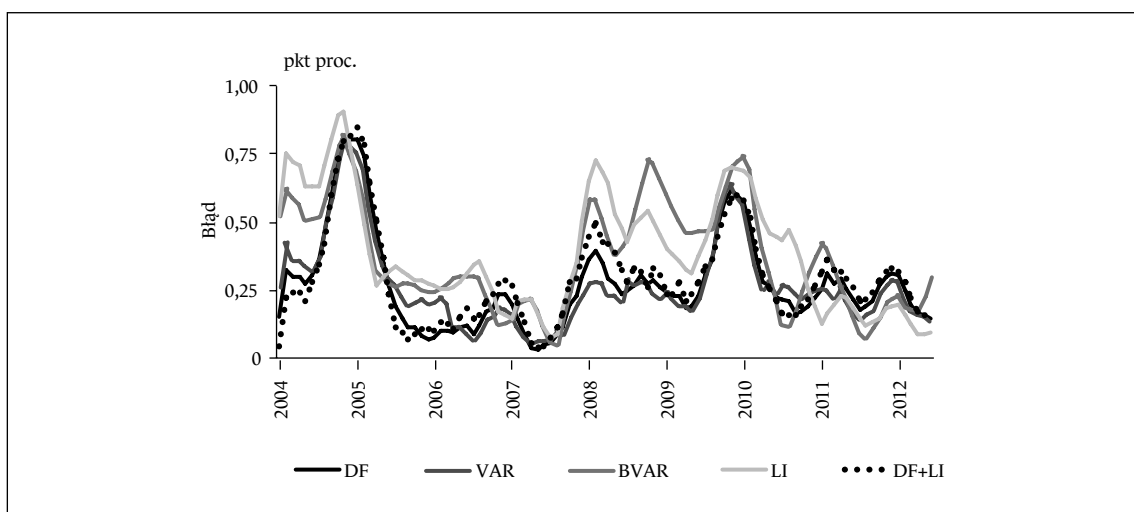
Rysunek 3

Wyglądzone absolutne błędy prognoz na jeden kwartał do przodu dla wynagrodzeń w gospodarce narodowej (dane miesięczne)



Wykres 4

Wyglądzone absolutne błędy prognoz na jeden kwartał do przodu dla pracujących w gospodarce narodowej według GUS (dane miesięczne)



Wykres 5

Wygładzone absolutne błędy prognoz na jeden kwartał do przodu dla pracujących według BAEL (dane miesięczne)

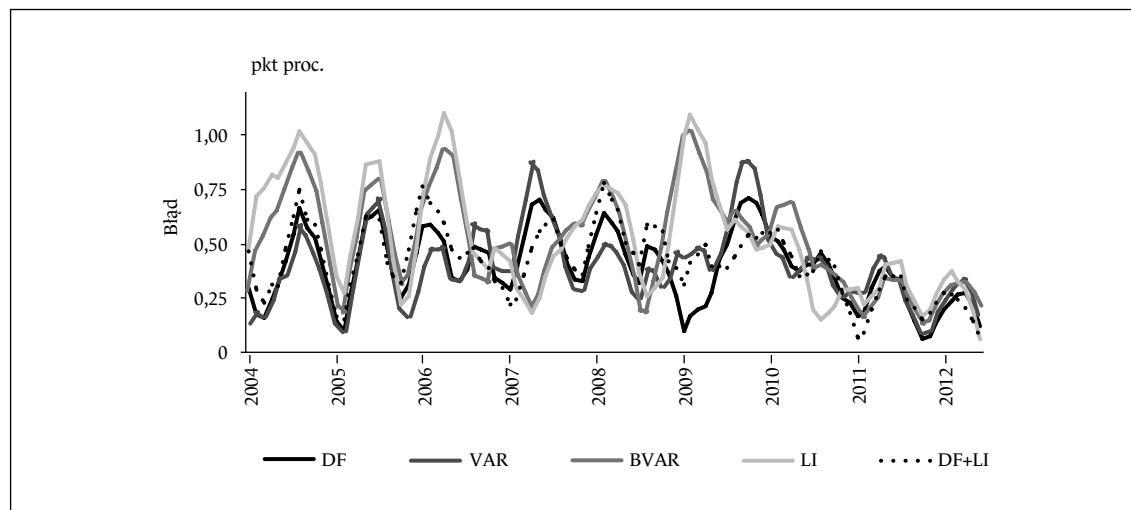


Tabela 1

Zmienne tworzące wskaźniki wyprzedzające

Zmienna prognozowana	Wariant	X_1	X_2
Pracujący w gospodarce narodowej	$R = 60$ $P = 102$	Przeciętne zatrudnienie w sektorze przedsiębiorstw	IFO Climate – Germany
	$R = 90$ $P = 72$	Przeciętne zatrudnienie w sektorze przedsiębiorstw	Wskaźnik koniunktury PMI
Pracujący według BAEL	$R = 60$ $P = 102$	WIBOR3m	Business Climate Indicator – Poland (Eurostat)
	$R = 90$ $P = 72$	OECD Composite Leading Indicator – Germany (OECD)	Business Climate Indicator – Poland (Eurostat)
Średnie miesięczne wynagrodzenie w gospodarce narodowej	$R = 60$ $P = 102$	Przeciętne zatrudnienie w sektorze przedsiębiorstw	Podaż pieniądza M3
	$R = 90$ $P = 72$	Przeciętne miesięczne wynagrodzenie w sektorze przedsiębiorstw	Business Climate Indicator – Poland (Eurostat)

Tabela 2

Błędy średniokwadratowe prognoz wygasłych dla wszystkich wyprzedzeń łącznie (w pkt bazowych)

R = 60, P = 102					R = 90, P = 72				
Wynagrodzenia w gospodarce narodowej									
Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$	Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$
DF 0022	57	62	76	86	DF 0021	46*	44**	50***	57***
VAR 2	55	57	76	90	VAR 2	50*	57	70	75
BVAR 6	55	62	70	76	BVAR 1	59	66	69	69
LI	51	53*	66	69	LI	47*	52	60	67
DF + LI	51*	54*	67*	70*	DF + LI	44**	45***	53***	61**
JO OPT	48	46	59	65	JO OPT	44	45	54	62
Pracujący w gospodarce narodowej według GUS									
Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$	Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$
DF 0033	37**	42**	52**	63*	DF 1022	31**	36*	46*	56
VAR 1	46	57	67	76	VAR 2	40	44*	55	61
BVAR 6	45	53*	62*	68*	BVAR 6	43	49	59	65
LI	35**	44**	51**	57**	LI	28**	43	49	57
DF + LI	33***	34****	42****	48****	DF + LI	26****	38**	48	56
JO OPT	33	41	49	56	JO OPT	26	36	47	55
Pracujący według BAEL									
Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$	Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$
DF 0031	51**	55**	55**	62**	DF 0051	47*	47**	46**	54**
VAR 1	65	72	73	76	VAR 3	58	53*	53**	59
BVAR 6	60*	68*	68*	70*	BVAR 6	57	65	64	67
LI	52**	57**	61*	68*	LI	53	57	68	75
DF + LI	46****	49****	52***	57****	DF + LI	40****	41****	48**	53**
JO OPT	46	53	54	60	JO OPT	39	41	42	50

Uwagi:

R – długość próby służącej do estymacji parametrów,

P – liczba prognoz wygasłych,

 τ – horyzont prognozy w kwartałach.Cyfry w modelu DF oznaczają: liczbę opóźnień v_1 , występowanie części autoregresyjnej w modelu (3), liczbę dodatkowych opóźnień v_2 oraz liczbę czynników k .JO OPT – prognozy łączone z wagami optymalnymi *ex post*.

Liczba gwiazdek wskazuje liczbę przypadków w porównaniach parami, w których dany model generował lepsze prognozy według testu Diebolda-Mariano na poziomie istotności 0,1 (z testów wyłączony był model JO OPT).

Tabela 3

Błędy średniokwadratowe prognoz wygasłych dla rekursywnego schematu prognozowania (w pkt bazowych)

$R_{min} = 60, P = 102$					$R_{min} = 90, P = 72$				
Wynagrodzenia w gospodarce narodowej									
Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$	Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$
DF 0053	57	59	66	75	DF 0051	55	57	64	74
VAR 4	52	55	65	79	VAR 4	50	50	57	78
BVAR 5	51	53	60	65	BVAR 4	52	58	63	69
LI	47	49	58	54	LI	49	50	62	68
DF + LI	48	49	58	61	DF + LI	48	49	57	69
JO OPT	43	46	53	58	JO OPT	45	46	52	67
Zatrudnienie w gospodarce narodowej według GUS									
Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$	Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$
DF 0052	34	43	51	61	DF 0033	30	39	47	60
VAR 2	41	44	59	68	VAR 2	41	43	55	61
BVAR 6	49	59	69	77	BVAR 6	44	47	55	60
LI	37	45	57	61	LI	28	44	48	57
DF + LI	33	41	53	59	DF + LI	26	38	45	55
JO OPT	31	37	49	57	JO OPT	25	41	48	59
Pracujący według BAEL									
Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$	Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$
DF 0122	50	53	56	60	DF 0023	43	44	44	47
VAR 4	58	58	54	62	VAR 6	47	53	44	43
BVAR 6	62	69	69	71	BVAR 6	53	56	54	55
LI	58	55	59	61	LI	50	49	60	59
DF + LI	51	50	54	58	DF + LI	44	41	50	50
JO OPT	47	49	51	56	JO OPT	39	41	41	42

Uwagi:

 P – liczba prognoz wygasłych, τ – horyzont prognozy w kwartałach.Cyfry w modelu DF oznaczają: liczbę opóźnień v_1 , występowanie części autoregresyjnej w modelu (3), liczbę dodatkowych opóźnień v_2 oraz liczbę czynników k .JO OPT – prognozy łączone z wagami optymalnymi *ex post*.

Tabela 4

Błędy średniokwadratowe prognoz wygasłych dla schematu rolowanego w takim samym okresie weryfikacji (w pkt bazowych)

$R = 60, P = 72$					$R = 90, P = 72$				
Wynagrodzenia w gospodarce narodowej									
Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$	Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$
DF 0022	56	63	75	87	DF 0021	46	44	50	57
VAR 2	59	63	82	98	VAR 2	50	57	70	75
BVAR 6	60	69	76	81	BVAR 1	59	66	69	69
LI	53	52	60	72	LI	47	52	60	67
DF + LI	51	51	60	70	DF + LI	44	45	53	61
JO OPT	50	50	61	71	JO OPT	44	45	54	62
Zatrudnienie w gospodarce narodowej wg GUS									
Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$	Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$
DF 0022	31	34	45	58	DF 1022	31	36	46	56
VAR 1	41	46	58	65	VAR 2	40	44	55	61
BVAR 6	43	46	53	57	BVAR 6	43	49	59	65
LI	29	48	52	65	LI	28	43	49	57
DF + LI	29	39	44	56	DF + LI	26	38	48	56
JO OPT	29	41	45	57	JO OPT	26	36	47	55
Pracujący wg BAEL									
Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$	Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$
DF 0021	47	46	48	59	DF 0051	47	47	46	54
VAR 1	56	58	59	63	VAR 3	58	53	53	59
BVAR 4	55	60	61	62	BVAR 6	57	65	64	67
LI	53	47	56	59	LI	53	57	68	75
DF + LI	46	43	50	55	DF + LI	40	41	48	53
JO OPT	45	44	49	55	JO OPT	39	41	42	50

Uwagi:

R – długość próby służącej do estymacji parametrów,

P – liczba prognoz wygasłych,

τ – horyzont prognozy w kwartałach.

Cyfry w modelu DF oznaczają: liczbę opóźnień v_1 , występowanie części autoregresyjnej w modelu (3), liczbę dodatkowych opóźnień v_2 oraz liczbę czynników k .

JO OPT – prognozy łączone z wagami optymalnymi *ex post*.

Tabela 5

Lista zmiennych objaśniających wykorzystanych w pracy

Obszar	Nazwa zmiennej	Źródło	Częstotliwość	Przekształcenie zmiennej	LI	m_1	m_2
Koniunktura w budownictwie	Przewidywane zatrudnienie w przedsiębiorstwie w ciągu trzech miesięcy	GUS	m	-	-	1,93	0,15
	Opóźnienie płatności	GUS	m	-	-	1,88	0,17
	Przewidywana sytuacja finansowa przedsiębiorstw	GUS	m	-	-	1,80	0,12
	Przewidywany portfel zamówień na roboty budowlano-montażowe na rynku krajowym	GUS	m	-	-	1,29	0,15
	Wskaźnik klimatu ogółem	GUS	m	-	-	2,83	0,18
Koniunktura w handlu	Przewidywane zatrudnienie w przedsiębiorstwie w ciągu trzech miesięcy	GUS	m	-	-	2,02	0,19
	Ilość sprzedawanych towarów	GUS	m	-	-	5,06	0,21
	Ceny sprzedawanych towarów	GUS	m	-	-	1,45	0,10
	Ogólna sytuacja ekonomiczna	GUS	m	-	-	3,51	0,24
	Przewidywana ogólna sytuacja ekonomiczna	GUS	m	-	-	1,96	0,19
	Przewidywane ceny towarów	GUS	m	-	-	1,10	0,07
	Zapasy towarów	GUS	m	-	-	0,49	0,06
Koniunktura w przemyśle	Przewidywane zatrudnienie w przedsiębiorstwie w ciągu trzech miesięcy	GUS	m	-	-	1,47	0,14
	Prognoza ogólnej sytuacji gospodarczej na najbliższe trzy miesiące	GUS	m	-	-	1,26	0,14
	Przewidywane ceny sprzedaży wyrobów	GUS	m	-	-	1,12	0,09
	Stan zapasów wyrobów gotowych	GUS	m	-	-	0,99	0,09
	Wskaźnik ogólnego klimatu koniunktury	GUS	m	-	-	1,35	0,12
	Wskaźnik wykorzystania mocy produkcyjnych	GUS	q	ind.	-	2,08	0,19

Rynek pracy	Przeciętne miesięczne wynagrodzenie w sektorze przedsiębiorstw – ubruttowione	GUS	m	ind.	T	4,38	0,22
	Przeciętne zatrudnienie w sektorze przedsiębiorstw	GUS	m	ind.	T	3,62	0,10
	Przeciętne zatrudnienie w sektorze przedsiębiorstw – przemysł	GUS	m	ind.	T	5,22	0,20
	Bezrobotni zarejestrowani dotychczas niepracujący	GUS	m	ind.	–	5,83	0,19
	Bezrobotni nowo zarejestrowani	GUS	m	ind.	–	5,42	0,20
	Oferty pracy zarejestrowane w ciągu miesiąca	GUS	m	ind.	T	3,57	0,17
	Oferty pracy wg stanu na koniec miesiąca	GUS	m	ind.	T	4,30	0,18
	Prawdopodobieństwo znalezienia pracy	NBP	m	–	T	1,49	0,19
	Prawdopodobieństwo utraty pracy	NBP	m	–	T	1,63	0,16
	Stopa bezrobocia rejestrowanego	GUS	m	przyr.	–	1,32	0,18
	Pracujący w gospodarce narodowej (stan na koniec kwartału)	GUS	q	ind.	–	1,98	0,25
	Wydajność pracy (na podstawie PKB oraz pracujących według BAEL) (PKB, BAEL)	GUS	q	przyr.	–	1,92	0,32
	Wydajność pracy (na podstawie wartości dodanej brutto oraz zatrudnienia wg GUS)	GUS	q	przyr.	–	2,07	0,32
Ubezpieczenia społeczne	Przeciętna liczba emerytów i rencistów z pozarolniczego systemu ubezpieczeń społecznych	GUS	m	ind.	–	2,66	0,21
	Przeciętna emerytura i renta rolników indywidualnych	GUS	m	ind.	–	3,90	0,05
	Przeciętna emerytura i renta z pozarolniczego systemu ubezpieczeń społecznych	GUS	m	ind.	–	5,84	0,15
	Zasiłki dla bezrobotnych	GUS	m	ind.	–	2,53	0,14

Inflacja	Średnia oczekiwana stopa inflacji w ciągu najbliższych 12 miesięcy	NBP	m	–	<i>T</i>	1,73	0,10
	Stopa inflacji HICP (m/m)	Eurostat	m	–	–	1,90	0,13
	Stopa inflacji HICP – żywność i napoje bezalkoholowe (m/m)	Eurostat	m	–	–	1,61	0,11
	Stopa inflacji HICP – napoje alkoholowe i wyroby tytoniowe (m/m)	Eurostat	m	–	–	3,31	0,11
	Stopa inflacji HICP – odzież i obuwie (m/m)	Eurostat	m	–	–	4,03	0,29
	Stopa inflacji HICP – utrzymanie mieszkania (m/m)	Eurostat	m	–	–	5,63	0,16
	Stopa inflacji HICP – meble i artykuły gospodarstwa domowego (m/m)	Eurostat	m	–	–	1,43	0,13
	Stopa inflacji HICP – zdrowie (m/m)	Eurostat	m	–	–	3,32	0,09
	Stopa inflacji HICP – transport (m/m)	Eurostat	m	–	–	0,60	0,10
	Stopa inflacji HICP – Komunikacja (m/m)	Eurostat	m	–	–	–	–
	Stopa inflacji HICP – rozrywka i kultura (m/m)	Eurostat	m	–	–	2,10	0,21
	Stopa inflacji HICP – edukacja (m/m)	Eurostat	m	–	–	7,22	0,14
	Stopa inflacji HICP – restauracje i hotele (m/m)	Eurostat	m	–	–	1,95	0,11
	Stopa inflacji HICP – pozostałe dobra i usługi (m/m)	Eurostat	m	–	–	4,64	0,16
	Stopa inflacji HICP – dobra przemysłowe z wyłączeniem energii (m/m)	Eurostat	m	–	–	1,39	0,16
Stopa inflacji HICP – energia (m/m)	Eurostat	m	–	–	1,05	0,08	
Wskaźniki finansowe	WIG20 (średnia miesięczna)	stooq.pl	m	ind.	<i>T</i>	1,34	0,15
	Kurs EUR/PLN (średni miesięczny)	stooq.pl	m	ind.	<i>T</i>	1,15	0,08
	Podaż pieniądza M3	NBP	m	ind.	<i>T</i>	3,91	0,18
	WIBOR3m (średnia miesięczna)	stooq.pl	m	–	<i>T</i>	1,15	0,10

Wskaźniki koniunktury	Wskaźnik koniunktury PMI	Markit	m	–	<i>T</i>	1,62	0,13
	IFO Climate Germany	IFO	m	–	<i>T</i>	1,47	0,15
	IFO Situation Germany	IFO	m	–	<i>T</i>	1,36	0,16
	IFO Expectations Germany	IFO	m	–	<i>T</i>	0,48	0,09
	Composite Leading Indicator – Germany	OECD	m	–	<i>T</i>	0,95	0,08
	Composite Leading Indicator – Poland	OECD	m	–	<i>T</i>	0,86	0,09
	Business Climate Indicator – Poland	Eurostat	m	–	<i>T</i>	1,58	0,20
Sfera realna	Produkcja sprzedana przemysłu	GUS	m	ind.	–	2,65	0,17
	Import (w zł)	GUS	m	ind.	–	1,36	0,11
	Eksport (w zł)	GUS	m	ind.	–	2,12	0,14
	Produkt krajowy brutto w cenach bieżących	GUS	q	ind.	–	2,51	0,19
	Wartość dodana brutto w cenach bieżących	GUS	q	ind.	–	3,32	0,28
Zmienne prognozowane	Przeciętne zatrudnienie w gospodarce narodowej	GUS	q	ind.	–	3,35	0,27
	Pracujący według BAEL	GUS	q	ind.	–	2,06	0,21
	Przeciętne wynagrodzenie miesięczne brutto	GUS	q	ind.	–	3,26	0,23

Uwagi:

Częstotliwość m – miesięczna, q – kwartalna.

Przekształcenie zmiennej: ind. – indeksy łańcuchowe, przyr. – przyrosty łańcuchowe.

W kolumnie LI *T* oznacza, że dana zmienna była zakwalifikowana jako potencjalna zmienna objaśniająca w modelach wskaźników wyprzedzających.

m_1 – maksymalna różnica spowodowana sekwencyjnym odsezonowaniem w stosunku do odchylenia standardowego szeregu odsezonowanego (dla $R_{\min} = 21$ obserwacji kwartalnych lub $R_{\min} = 60$ obserwacji miesięcznych),

m_2 – średnie odchylenie standardowe poszczególnych obserwacji będące skutkiem sekwencyjnego odsezonowania w stosunku do odchylenia standardowego szeregu odsezonowanego.

Tabela 6

Istotne wyniki testów warunkowej zdolności prognostycznej Giacomini'ego i White'a

Zmienna	Model 1	Model 2	T	h	R ² (w %)
Wynagrodzenia w gospodarce narodowej	LI	VAR	90	1	2,8
	VAR	DF	60	2	5,5
	VAR	BVAR	60	2	4,3
	VAR	DF + LI	60	2	2,1
	BVAR	DF	60	2	1,7
	LI	DF + LI	60	2	8,7
	LI	DF	60	4	3,5
Pracujący w gospodarce narodowej według GUS	DF	VAR	90	4	8,0
	DF	BVAR	90	4	3,9
	DF	LI	90	4	11,1
	DF	DF + LI	90	4	10,0
	DF + LI	BVAR	90	4	10,3
	DF	LI	60	1	5,6
	DF	DF + LI	60	1	10,4
Pracujący według BAEL	DF	LI	60	2	4,9
	DF	DF + LI	90	3	4,7
	DF	DF + LI	90	4	8,8
	VAR	BVAR	90	4	0,7
	VAR	LI	90	4	2,1
	DF	DF + LI	60	3	2,9

Uwagi:

Model 1 – model, który daje lepsze prognozy dla niskich wartości zmiennej prognozowanej,

Model 2 – model, który daje lepsze prognozy dla wysokich wartości zmiennej prognozowanej,

R² – współczynnik determinacji, opisujący siłę zależności pomiędzy zmienną prognozowaną a kwadratami błędów prognoz.

Tabela 7

Błędy średniokwadratowe prognoz wygasłych dla zmiennej wynagrodzenia w gospodarce narodowej (w pkt bazowych)

$R = 60, P = 102$					$R = 90, P = 72$				
Wyprzedzenie o 1 miesiąc									
Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$	Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$
DF 0022	59	66	79	91	DF 0021	45*	44**	49*	59**
VAR 2	52	57	76	90	VAR 2	49	56	69	73
BVAR 6	54	62	70	76	BVAR 1	59	66	69	69
LI	50	54	65	65	LI	47	52	58	67
DF + LI	52*	57*	68*	72*	DF + LI	44*	47**	52	62*
JO OPT	46	48	58	64	JO OPT	43	46	52	63
Wyprzedzenie o 2 miesiące									
Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$	Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$
DF 0022	55	59	74	78	DF 0021	44*	41**	49**	54***
VAR 2	52	57	76	90	VAR 2	49	56	69	73
BVAR 6	54	62	70	76	BVAR 1	59	66	69	69
LI	51	56	70	74	LI	44*	52	61	68
DF + LI	50	53	67	68	DF + LI	41**	44***	53**	59*
JO OPT	46	47	60	67	JO OPT	41	43	53	60
Wyprzedzenie o 3 miesiące									
Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$	Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$
DF 0022	57	62	74	89	DF 0021	49	46**	51*	58
VAR 2	60	57	77	90	VAR 2	52	59	73	77
BVAR 6	58	62	70	76	BVAR 1	58	66	69	69
LI	52	47**	64	66	LI	50	51	59	67
DF + LI	52	51*	66*	72*	DF + LI	47	46**	53**	61*
JO OPT	50	43	58	64	JO OPT	47	47	54	62

Uwagi:

R – długość próby służącej do estymacji parametrów,

P – liczba prognoz wygasłych,

τ – horyzont prognozy w kwartałach.

Cyfry w modelu DF oznaczają: liczbę opóźnień v_1 , występowanie części autoregresyjnej w modelu (3), liczbę dodatkowych opóźnień v_2 oraz liczbę czynników k .

JO OPT – prognozy łączone z wagami optymalnymi *ex post*.

Liczba gwiazdek wskazuje liczbę przypadków w porównaniach parami, gdy dany model generował lepsze prognozy według testu Diebolda i Mariano na poziomie istotności 0,1 (z testów wyłączono model JO OPT).

Tabela 8

Błędy średniokwadratowe prognoz wygasłych dla zmiennej pracujący w gospodarce narodowej według GUS (w pkt bazowych)

$R = 20, P = 102$					$R = 30, P = 72$				
Wyprzedzenie o 1 miesiąc									
Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$	Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$
DF 0033	37**	39**	51**	59*	DF 1022	31*	36*	49	56
VAR 1	46	57	67	76	VAR 2	40	43	56	61
BVAR 6	45	52	62*	68*	BVAR 6	43	48	59	65
LI	38**	44*	47**	56*	LI	31*	44	49	58
DF + LI	36**	33***	41****	47****	DF + LI	29**	39**	49	58
JO OPT	37	40	47	54	JO OPT	28	37	48	56
Wyprzedzenie o 2 miesiące									
Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$	Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$
DF 0033	35**	42**	51**	61*	DF 1022	33*	40	46	58
VAR 1	46	57	67	76	VAR 2	40	43	56	61
BVAR 6	45	52	62*	68*	BVAR 6	43	48	59	65
LI	33**	45*	56*	59*	LI	29**	45	53	59
DF + LI	31**	36***	45****	48****	DF + LI	25***	39*	48*	56
JO OPT	32	42	55	56	JO OPT	26	37	47	54
Wyprzedzenie o 3 miesiące									
Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$	Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$
DF 0033	37**	45**	52**	67**	DF 1022	28**	32***	44	56
VAR 1	47	58	67	77	VAR 2	40	44*	55	61
BVAR 6	45	54	62*	69*	BVAR 6	43	50	58	67
LI	33**	42**	50**	53**	LI	24**	41*	46	53
DF + LI	32**	34****	42****	50***	DF + LI	24**	37**	46	55
JO OPT	32	41	49	57	JO OPT	23	34	46	54

Uwagi:

R – długość próby służącej do estymacji parametrów,

P – liczba prognoz wygasłych,

τ – horyzont prognozy w kwartałach.

Cyfry w modelu DF oznaczają: liczbę opóźnień v_1 , występowanie części autoregresyjnej w modelu (3), liczbę dodatkowych opóźnień v_2 oraz liczbę czynników k .

JO OPT – prognozy łączone z wagami optymalnymi *ex post*.

Liczba gwiazdek wskazuje liczbę przypadków w porównaniach parami, gdy dany model generował lepsze prognozy według testu Diebolda i Mariano na poziomie istotności 0,1 (z testów wyłączono model JO OPT).

Tabela 9

Błędy średniokwadratowe prognoz wygasłych dla zmiennej pracującej według BAEL
(w pkt bazowych)

$R = 20, P = 102$					$R = 30, P = 72$				
Wyprzedzenie o 1 miesiąc									
Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$	Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$
DF 0031	51**	56**	55*	61*	DF 0051	47	47*	43**	55**
VAR 1	65	72	73	75	VAR 3	57	52*	53**	59
BVAR 6	60	68	67	69	BVAR 6	56	64	63	67
LI	51*	57**	62*	70	LI	52	58	71	76
DF + LI	45***	50**	53***	58***	DF + LI	38**	42***	49***	54**
JO OPT	47	54	56	61	JO OPT	38	42	42	52
Wyprzedzenie o 2 miesiące									
Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$	Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$
DF 0031	53*	55**	53**	58***	DF 0051	48	46*	51**	55**
VAR 1	65	72	73	75	VAR 3	57	52*	53**	59
BVAR 6	60	68	67	69	BVAR 6	56	64	63	67
LI	53*	62	62	71	LI	52	58	71	76
DF + LI	46***	51**	51***	56***	DF + LI	38***	42**	49**	54**
JO OPT	46	55	54	60	JO OPT	38	40	43	51
Wyprzedzenie o 3 miesiące									
Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$	Model	$\tau = 1$	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$
DF 0031	50*	54**	58*	67	DF 0051	46	47*	44**	54**
VAR 1	66	73	74	78	VAR 3	60	53*	54*	60
BVAR 6	60*	69	69*	73	BVAR 6	60	65	66	68
LI	53	51**	58*	65*	LI	54	54	62	75
DF + LI	47**	46****	51***	56****	DF + LI	44*	40***	45**	51**
JO OPT	47	50	52	60	JO OPT	40	41	40	48

Uwagi:

R – długość próby służącej do estymacji parametrów,

P – liczba prognoz wygasłych,

τ – horyzont prognozy w kwartałach.

Cyfry w modelu DF oznaczają: liczbę opóźnień v_1 , występowanie części autoregresyjnej w modelu (3), liczbę dodatkowych opóźnień v_2 oraz liczbę czynników k .

JO OPT – prognozy łączone z wagami optymalnymi *ex post*.

Liczba gwiazdek wskazuje liczbę przypadków w porównaniach parami, gdy dany model generował lepsze prognozy według testu Diebolda-Mariano na poziomie istotności 0,1 (z testów wyłączono model JO OPT).

Aneks 2

Niech: $y_t^{(1)} = \ln(Y_t / Y_{t-1})$, $y_t^{(3)} = \ln(Y_t / Y_{t-3})$ oraz $y_t^{(1)} = a_0 + a_1 y_{t-1}^{(1)} + \sum_{i=0}^{v_1} \mathbf{A}_i \mathbf{f}_{t-i} + \varepsilon_t^{(1)}$

wtedy:

$$\begin{aligned} y_t^{(3)} &= y_t^{(1)} + y_{t-1}^{(1)} + y_{t-2}^{(1)} = \\ &= a_0 + a_1 y_{t-1}^{(1)} + \sum_{i=0}^{v_1} \mathbf{A}_i \mathbf{f}_{t-i} + \varepsilon_t^{(1)} + a_0 + a_1 y_{t-2}^{(1)} + \sum_{i=0}^{v_1} \mathbf{A}_i \mathbf{f}_{t-1-i} + \varepsilon_{t-1}^{(1)} + a_0 + a_1 y_{t-3}^{(1)} + \sum_{i=0}^{v_1} \mathbf{A}_i \mathbf{f}_{t-2-i} + \varepsilon_{t-2}^{(1)} = \\ &= 3a_0 + a_1 (y_{t-1}^{(1)} + y_{t-2}^{(1)} + y_{t-3}^{(1)}) + \sum_{i=0}^{v_1} \mathbf{A}_i (\mathbf{f}_{t-i} + \mathbf{f}_{t-1-i} + \mathbf{f}_{t-2-i}) + \varepsilon_t^{(1)} + \varepsilon_{t-1}^{(1)} + \varepsilon_{t-2}^{(1)} = \\ &= 3a_0 + a_1 y_{t-1}^{(3)} + \sum_{i=0}^{v_1} \mathbf{A}_i' \mathbf{Z}_{t-i} + \sum_{j=0}^{\setminus 2} \varepsilon_{t-j}^{(1)} \end{aligned}$$

przy czym $y_{t-1}^{(3)} = y_{t-1}^{(1)} + y_{t-2}^{(1)} + y_{t-3}^{(1)}$ oraz $\mathbf{Z}_{t-i} = \mathbf{f}_{t-i} + \mathbf{f}_{t-1-i} + \mathbf{f}_{t-2-i}$

Wstawiając $y_{t-1}^{(3)} = 3a_0 + a_1 y_{t-2}^{(3)} + \sum_{i=0}^{v_1} \mathbf{A}_i' \mathbf{Z}_{t-1-i} + \sum_{j=0}^{\setminus 2} \varepsilon_{t-1-j}^{(1)}$, uzyskujemy:

$$\begin{aligned} y_t^{(3)} &= 3a_0 + a_1 \left(3a_0 + a_1 y_{t-2}^{(3)} + \sum_{i=0}^{v_1} \mathbf{A}_i' \mathbf{Z}_{t-1-i} + \sum_{j=0}^{\setminus 2} \varepsilon_{t-1-j}^{(1)} \right) + \sum_{i=0}^{v_1} \mathbf{A}_i' \mathbf{Z}_{t-i} + \sum_{j=0}^{\setminus 2} \varepsilon_{t-j}^{(1)} = \\ &= 3a_0 (1 + a_1) + a_1^2 y_{t-2}^{(3)} + \sum_{i=0}^{v_1} \mathbf{A}_i' \mathbf{Z}_{t-i} + a_1 \sum_{i=0}^{v_1} \mathbf{A}_i' \mathbf{Z}_{t-1-i} + \sum_{j=0}^{\setminus 2} \varepsilon_{t-j}^{(1)} + a_1 \sum_{j=0}^{\setminus 2} \varepsilon_{t-1-j}^{(1)} \end{aligned}$$

Powtarzając procedurę dla $y_{t-2}^{(3)}$, mamy:

$$\begin{aligned} y_t^{(3)} &= 3a_0 (1 + a_1) + a_1^2 \left(3a_0 + a_1 y_{t-3}^{(3)} + \sum_{i=0}^{v_1} \mathbf{A}_i' \mathbf{Z}_{t-2-i} + \sum_{j=0}^{\setminus 2} \varepsilon_{t-2-j}^{(1)} \right) + \sum_{i=0}^{v_1} \mathbf{A}_i' \mathbf{Z}_{t-i} + a_1 \sum_{i=0}^{v_1} \mathbf{A}_i' \mathbf{Z}_{t-1-i} \\ &+ \sum_{j=0}^{\setminus 2} \varepsilon_{t-j}^{(1)} + a_1 \sum_{j=0}^{\setminus 2} \varepsilon_{t-1-j}^{(1)} = \\ &= 3a_0 (1 + a_1 + a_1^2) + a_1^3 y_{t-3}^{(3)} + \sum_{i=0}^{v_1} \mathbf{A}_i' \mathbf{Z}_{t-i} + a_1 \sum_{i=0}^{v_1} \mathbf{A}_i' \mathbf{Z}_{t-1-i} + a_1^2 \sum_{i=0}^{v_1} \mathbf{A}_i' \mathbf{Z}_{t-2-i} + \\ &+ \sum_{j=0}^{\setminus 2} \varepsilon_{t-j}^{(1)} + a_1 \sum_{j=0}^{\setminus 2} \varepsilon_{t-1-j}^{(1)} + a_1^2 \sum_{j=0}^{\setminus 2} \varepsilon_{t-2-j}^{(1)} \end{aligned}$$

Stąd:

$$y_t^{(3)} = b_0 + b_1 y_{t-3}^{(3)} + \sum_{i=0}^{v_1} \mathbf{B}_i' \mathbf{Z}_{t-i} + \varepsilon_t^{(3)} \quad (6)$$

gdzie:

$$b_0 = 3a_0 (1 + a_1 + a_1^2), \quad b_1 = a_1^3, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1 + a_1 \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{A}_2 + a_1 \mathbf{A}_1 + a_1^2 \mathbf{A}_0,$$

$$\mathbf{B}_{m-2} = \mathbf{A}_m + a_1 \mathbf{A}_{m-1} + a_1^2 \mathbf{A}_{m-2}, \quad \mathbf{B}_{m-1} = a_1 \mathbf{A}_m + a_1^2 \mathbf{A}_{m-1}, \quad \mathbf{B}_m = a_1^2 \mathbf{A}_m,$$

$$\varepsilon_t^{(3)} = \varepsilon_t^{(1)} + (1 + a_1) \varepsilon_{t-1}^{(1)} + (1 + a_1 + a_1^2) \varepsilon_{t-2}^{(1)} + (1 + a_1 + a_1^2) \varepsilon_{t-3}^{(1)} + \dots + a_1 (1 + a_1) \varepsilon_{t-m+1}^{(1)} + a_1^2 \varepsilon_{t-m}^{(1)}$$

