

Kalibracja dwuczynnikowego modelu chwilowej stopy procentowej typu G2++ w mierze rzeczywistej i neutralnej względem ryzyka

Łukasz Delong*, Damian Sulik#

Nadesłany: 1 stycznia 2017 r. Zaakceptowany: 6 czerwca 2017 r.

Streszczenie

Jako model struktury terminowej stóp procentowych proponujemy dwuczynnikowy model chwilowej stopy procentowej typu G2++, w którym rozkład czynników w mierze neutralnej względem ryzyka jest dwuwymiarowym rozkładem normalnym, a rozkład czynników w mierze rzeczywistej jest dowolny (zarówno rozkłady brzegowe czynników, jak i struktura zależności są dowolne). Do kalibracji modelu sugerujemy zastosować metodę quasi-wiarogodności opartą na zaobserwowanych rentownościach obligacji dla wszystkich dostępnych terminów zapadalności. W pracy oszacowaliśmy nasz model typu G2++, wykorzystując rentowności obligacji skarbowych z polskiego rynku. Jako dwuwymiarowy rozkład czynników w mierze rzeczywistej zidentyfikowaliśmy rozkład z brzegowymi rozkładami t-Studenta i kopułę t-Studenta o różnych stopniach swobody. Przeprowadziliśmy szczegółową analizę dopasowania naszego modelu w mierze rzeczywistej i neutralnej względem ryzyka. Oszacowany model wykorzystaliśmy do prognozy krzywej dochodowości rentowności polskich obligacji skarbowych w perspektywie jednego roku. Dodatkowo, jako inny przykład zastosowania modelu, na podstawie prognoz krzywej dochodowości wyznaczyliśmy wartość portfela obligacji i wymóg kapitałowy z tytułu ryzyka stopy procentowej dla portfela obligacji.

Słowa kluczowe: krzywa dochodowości, model G2++, metoda quasi-wiarogodności, kopuła t-Studenta, wymóg kapitałowy SCR

JEL: C51, C58, G12

* Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Instytut Ekonometrii; e-mail: lukasz.delong@sgh.waw.pl

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Instytut Ekonometrii, Aviva Towarzystwo Ubezpieczeń na Życie SA.

1. Wstęp

Jednym z zadań instytucji finansowych, banków i firm ubezpieczeniowych jest wyznaczanie wartości bilansowej aktywów i pasywów. Po stronie aktywów i pasywów znajdują się m.in. instrumenty finansowe i zobowiązania, których cena zależy od stopy procentowej. Zgodnie z teorią finansów i fundamentalnym twierdzeniem z matematyki finansowej o braku arbitrażu cena instrumentu finansowego i wartość zobowiązania powinny być wyznaczone jako wartość oczekiwana zdyskontowanych przyszłych przepływów pieniężnych (zdyskontowanych przy użyciu wolnej od ryzyka stopy procentowej). W przypadku wielu instrumentów, np. *cap*, *caplet*, *floor*, *floorlet*, *swaption*, same przyszłe przepływy zależą od stopy procentowej. Wyznaczenie wartości bilansowych aktywów i pasywów banku czy firmy ubezpieczeniowej wymaga więc użycia modelu stopy procentowej (np. Korn, Korn, Kroisandt 2010, rozdz. 5.5; Møller, Steffensen 2007, rozdz. 2.4).

Model stopy procentowej wykorzystuje się w praktyce nie tylko do bieżącej wyceny aktywów i pasywów, ale także do prognozowania ich przyszłej wartości. W bankowości i w ubezpieczeniach obecnie obowiązuje umowa kapitałowa Bazylea II¹ i dyrektywa Wypłacalność 2². Obligują one instytucje finansowe do prognozowania, jak zmienia się wartość aktywów i pasywów w wyniku zmian czynników ryzyka, m.in. na skutek zmian stopy procentowej. Zgodnie z dyrektywą Wypłacalność 2 dla firm ubezpieczeniowych kwantyl rzędu 99,5% zmiany podstawowych środków własnych w ciągu roku określa tzw. wymóg kapitałowy SCR, czyli minimalny poziom nadwyżki aktywów nad zobowiązaniami, którą firma ubezpieczeniowa musi mieć na dzień wyceny, aby wypełnić swoje zobowiązania w ciągu najbliższych 12 miesięcy. Elementem składowym wymogu kapitałowego SCR jest wymóg kapitałowy z tytułu ryzyka stopy procentowej, który określamy analogicznie jako kwantyl rzędu 99,5% zmiany podstawowych środków własnych w ciągu roku w wyniku zmian stopy procentowej.

Powyższe dwa argumenty potwierdzają, że model stopy procentowej jest bardzo ważny w działalności instytucji finansowych, banków i firm ubezpieczeniowych. Użycie zwrotu „model stopy procentowej” nie oznacza, że modelujemy losowość jednej zmiennej – jednej stopy procentowej. Model stopy procentowej musi uwzględnić „wielowymiarowość” stopy procentowej i musi opisywać strukturę terminową stóp procentowych za pomocą tzw. krzywej dochodowości. Dobry model stopy procentowej musi więc poprawnie odzwierciedlać bieżącą krzywą dochodowości na potrzeby bieżącej wyceny aktywów i pasywów, a jednocześnie generować realistyczne zmiany krzywej dochodowości w przyszłości, zgodne z zaobserwowanymi w przeszłości zmianami krzywej dochodowości, na potrzeby wyznaczenia wymogu kapitałowego z tytułu ryzyka stopy procentowej w ustalonym okresie. Te dwa ważne zadania są realizowane przez model stopy procentowej w mierze neutralnej względem ryzyka i w mierze rzeczywistej.

W zastosowaniach praktycznych model stopy procentowej służący do wyceny aktywów i pasywów (model w mierze neutralnej względem ryzyka) bardzo często jest inny niż model stopy procentowej służący do generowania zmian krzywej dochodowości w przyszłości (model w mierze rzeczywistej). Standardem jest wykorzystanie stochastycznych równań różniczkowych i procesów dyfuzyjnych w mierze neutralnej względem ryzyka do wyceny aktywów i pasywów (np. Weron, Weron 2007, rozdz. 7) oraz stosowanie modelu głównych składowych w mierze rzeczywistej do analizy zmian krzywej dochodowości w czasie (np. McNeil, Frey, Embrechts 2005, rozdz. 3.4). Takie podejście ma pewne zalety, np.

¹ International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, <http://www.bis.org/publ/bcbs128.pdf>.

² Directive 2009/138/EC on the taking-up and pursuit of the business of insurance and reinsurance, <http://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:32009L0138&from=en>.

umożliwia rozróżnienie między zmiennością implikowaną a historyczną dla stóp procentowych czy wybranie innego mechanizmu losowego – rozkładu czynników generujących zmiany stopy procentowej w mierze rzeczywistej i neutralnej względem ryzyka). Ma też oczywiste wady związane z wykorzystaniem dwóch różnych modeli, często niespójnych i opartych na różnych założeniach. W tej pracy przedstawiamy jeden spójny model struktury terminowej stóp procentowych w mierze neutralnej względem ryzyka i w mierze rzeczywistej. Jest on szacowany na podstawie bieżącej i historycznej informacji o strukturze terminowej stóp procentowych i może być jednocześnie użyty do bieżącej wyceny aktywów i pasywów oraz do generowania realistycznych zmian krzywej dochodowości w ustalonym przyszłym okresie (i wyznaczenia wymogu kapitałowego z tytułu ryzyka stopy procentowej).

Proponujemy wykorzystanie dwuczynnikowego modelu chwilowej stopy procentowej typu G2++ z dowolnym rozkładem czynników w mierze rzeczywistej. Nasz model bazuje na dwuczynnikowym gaussowskim modelu chwilowej stopy procentowej G2++, który jest bardzo popularny w teorii i w praktyce (np. Brigo, Mercurio 2006, rozdz. 4; Hibbert, Mowbray, Turnbull 2001; Andersen, Piterbarg 2010, rozdz. 3; Dai, Singleton 2000). Dwuczynnikowy gaussowski model chwilowej stopy procentowej G2++ ma wiele zalet:

a) wolna od ryzyka chwilowa stopa procentowa jest modelowana za pomocą liniowej kombinacji dwóch czynników o prostych dynamikach opartych na dwóch skorelowanych, powracających do średniej, procesach stochastycznych typu Ornsteina-Uhlenbecka,

b) istnieją wzory analityczne pozwalające wycenić obligacje i instrumenty typu *cap*, *caplet*, *floor*, *floorlet*, *swaptions*,

c) dopasowanie cen teoretycznych do cen rynkowych jest zadowalające – model G2++ pozwala m.in. na odtworzenie rynkowej zmienności implikowanej dla instrumentów pochodnych stopy procentowej z garbem,

d) zmiany stóp *spot* i *forward* o różnych terminach zapadalności nie są doskonale skorelowane i krzywa dochodowości nie przesuwają się równolegle przy zadanych szokach,

e) funkcja wiarygodności dla czynników i zaobserwowanych stóp procentowych ma postać analityczną,

f) zaobserwowane zmiany krzywej dochodowości są w dużym stopniu wyjaśnione przez oszacowany model.

Dwuczynnikowy gaussowski model chwilowej stopy procentowej G2++ może zatem stanowić punkt wyjścia do skonstruowania bardziej zaawansowanych modeli stopy procentowej.

W klasycznym dwuczynnikowym gaussowskim modelu chwilowej stopy G2++ zakłada się, że rozkład czynników generujących zmiany stóp procentowych i krzywej dochodowości w czasie jest dwuwymiarowym rozkładem normalnym w mierze neutralnej względem ryzyka i w mierze rzeczywistej. Stosując model G2++, należy się spodziewać dobrego dopasowania modelu w mierze neutralnej względem ryzyka, tzn. dobrego dopasowania cen teoretycznych do cen rynkowych dla obligacji i instrumentów pochodnych. Dopasowanie modelu G2++ w mierze rzeczywistej, tzn. stopień wyjaśnienia przez model zaobserwowanych w czasie zmian struktury terminowej stóp procentowych, może być jednak niewystarczające (szczegółowo omawiamy w rozdziale 3). Oznacza to, że klasyczny model G2++ z rozkładem normalnym czynników w mierze neutralnej względem ryzyka i w mierze rzeczywistej jest odpowiedni do bieżącej wyceny aktywów i pasywów. Nie powinien być jednak wykorzystywany do generowania zmian krzywej dochodowości w przyszłości i do wyznaczenia wymogu kapitałowego z tytułu ryzyka stopy procentowej, a taka właśnie sytuacja często ma miejsce w praktycznych zastosowaniach. Proponujemy więc dwuczynnikowy model chwilowej stopy procentowej typu G2++, w którym rozkład czyn-

ników w mierze neutralnej względem ryzyka pozostanie dwuwymiarowym rozkładem normalnym, a rozkład czynników w mierze rzeczywistej jest dowolny (zarówno rozkłady brzegowe, jak i struktura zależności są dowolne).

Celem jest modelowanie struktury terminowej wolnych od ryzyka stóp procentowych. Wolna od ryzyka krzywa dochodowości może być wyznaczana na podstawie stóp *swap* lub rentowności obligacji skarbowych. Zgodnie z wytycznymi Europejskiego Urzędu Nadzoru Ubezpieczeń i Pracowniczych Programów Emerytalnych (EIOPA 2017)³ w konstruowaniu wolnej od ryzyka krzywej dochodowości dla Polski należy się opierać na rentowności obligacji skarbowych. W tej pracy oszacowaliśmy nasz dwuczynnikowy model chwilowej stopy procentowej typu G2++ z dowolnym rozkładem czynników w mierze rzeczywistej, wykorzystując rentowności obligacji skarbowych z polskiego rynku. Dwuwymiarowy rozkład normalny czynników w mierze neutralnej okazał się wystarczający na potrzeby wyceny obligacji i prostych instrumentów pochodnych stopy procentowej. Jako dwuwymiarowy rozkład czynników w mierze rzeczywistej zidentyfikowaliśmy jednak rozkład z brzegowymi rozkładami t-Studenta i kopułę t-Studenta o różnych stopniach swobody. W celu kalibracji naszego modelu wykorzystaliśmy metodę quasi-wiarogodności opisaną w pracach: Duffee (2002); Fisher, Gilles (1996); Ait-Sahalia, Kimmel (2010). Metoda kalibracji uwzględniła informacje o zmianach struktury stóp procentowych w czasie (potrzebne do generowania realistycznych zmian krzywej dochodowości w przyszłości) i bieżącej strukturze stóp procentowych (potrzebne do bieżącej wyceny aktywów i pasywów). Przy kalibracji modelu wzięliśmy pod uwagę rentowności obligacji skarbowych dla wszystkich dostępnych terminów zapadalności. Przeprowadziliśmy szczegółową analizę dopasowania naszego dwuczynnikowego modelu chwilowej stopy procentowej typu G2++ w mierze rzeczywistej i neutralnej względem ryzyka. Następnie nasz oszacowany model typu G2++ wykorzystaliśmy do prognozowania krzywej dochodowości rentowności polskich obligacji skarbowych w perspektywie jednego roku. Dodatkowo, jako inny przykład zastosowania modelu, na podstawie prognozy krzywej dochodowości wyznaczyliśmy wymóg kapitałowy z tytułu ryzyka stopy procentowej dla portfela obligacji.

W polskiej literaturze jest kilka prac podejmujących temat oszacowania modeli stóp procentowych i krzywych dochodowości. Nasz artykuł jest najbliższy pracy Stamirowskiego (2003) i zawiera rozszerzenie wyników z tej pracy. Stamirowski (2003) oszacował jednoczynnikowy model Vasicka (i model CIR), wykorzystując informacje o historycznej i bieżącej strukturze stóp procentowych dla polskiego rynku. Do wyznaczenia szeregu czasowego chwilowej stopy procentowej wykorzystał model Svensona. Na podstawie dostępnych na rynku danych o rentowności obligacji skarbowych oszacował parametryczną postać krzywej stóp procentowych $R(t, \tau)$ dla okresu zapadalności τ (metodą najmniejszych kwadratów), a następnie wyznaczył granicę $R(t, \tau)$ dla $\tau \rightarrow 0$, którą można interpretować jako chwilową stopę procentową w chwili t . Mając szereg chwilowych stóp procentowych (lub raczej przybliżenie chwilowych stóp procentowych), Stamirowski (2003) oszacował parametry jednoczynnikowego modelu Vasicka metodą największej wiarogodności (w mierze rzeczywistej i neutralnej względem ryzyka). Wydaje się, że model stopy procentowej i podejście do estymacji modelu przedstawione w naszej pracy są lepsze z trzech powodów. Po pierwsze, dwuczynnikowy model stopy procentowej dokładniej odzwierciedli bieżący kształt krzywej dochodowości i w konsekwencji otrzymamy dokładniejszą bieżącą wycenę aktywów i pasywów oraz replikacji cen rynkowych. Po drugie, stosując metodę quasi-wiarogodności,

³ Technical documentation of the methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structure, <https://eiopa.europa.eu/regulation-supervision/insurance/solvency-ii-technical-information/risk-free-interest-rate-term-structures>.

możemy wybrać dowolny rozkład czynników w mierze rzeczywistej, dzięki czemu nasz model w większym stopniu wyjaśni zaobserwowane w przeszłości zmiany krzywej dochodowości i dzięki temu będzie generował bardziej realistyczne zmiany krzywej dochodowości w przyszłości. Po trzecie, zastosowana w naszej pracy metoda estymacji jest oparta na funkcji wiarygodności dla szeregu czasowego rentowności obligacji, a nie na funkcji wiarygodności dla szeregu chwilowej stopy procentowej. Należy podkreślić, że na rynku obserwujemy rentowności obligacji skarbowych, natomiast nie obserwujemy chwilowych stóp procentowych. Nieobserwowalne chwilowe stopy procentowe są odtworzone na podstawie rentowności wybranych obligacji, co jest elementem metody estymacji modelu stopy procentowej. Zapewnia to spójną estymację chwilowych stóp procentowych i parametrów modelu.

Należy także wspomnieć o innych pracach związanych z modelowaniem struktury terminowej stóp procentowych dla polskiego rynku. Waszkowski (2012) oszacował krzywe dochodowości dla rynku polskiego, wykorzystując modele Nelsona-Siegela i Svenssona. Na podstawie oszacowanych modeli wyznaczył chwilową stopę procentową, stosując podobne techniki jak Stamirowski (2003). Waszkowski (2012) nie dopasowywał jednak żadnego modelu chwilowej stopy procentowej. Marciniak (2006) zastosował funkcje sklepane (B-spline) do estymacji krzywych dochodowości. W jego pracy można znaleźć dokładny opis parametrycznych i nieparametrycznych metod estymacji krzywych dochodowości. Oprócz estymacji krzywych dochodowości oszacował model AR-GARCH dla zmian rentowności 5-letnich obligacji skarbowych. Wybór modelu wskazuje na gruboogonowy rozkład zmian rentowności obligacji w czasie, co również potwierdziliśmy w naszym badaniu. Model AR-GARCH nie został wykorzystany do prognozy krzywej dochodowości (model dotyczył tylko rentowności obligacji 5-letnich), ale do oceny wpływu nieoczekiwanych zdarzeń na rynek obligacji. Kliber (2009) porównał trzy metody estymacji krzywych dochodowości: metodę Nelsona-Siegela, metodę Svenssona i funkcje sklepane, wykazując przewagę funkcji sklepanych. Dodatkowo Kliber (2009) wyznaczył krzywą historycznych zmienności rentowności obligacji skarbowych dla różnych terminów zapadalności, jednak nie oszacował żadnego modelu probabilistycznego opisującego zmienność rentowności. Na koniec warto wspomnieć, że model głównych składowych dla krzywych dochodowości dla polskiego rynku został oszacowany w pracy Olszy (2012).

W literaturze zagranicznej jest wiele prac na temat modeli stóp procentowych i krzywych dochodowości. Chcielibyśmy zwrócić uwagę na pracę Cassoli i Luisa (2001), w której oszacowano dwuczynnikowy model Vasicka dla gospodarki niemieckiej, wykorzystując filtr Kalmana i metodę największej wiarygodności. Opracowanie to jest zbliżone do naszej pracy, my jednak dopuszczamy dowolny rozkład czynników w mierze rzeczywistej i stosujemy funkcję quasi-wiarygodności, co jest bardzo ważnym uogólnieniem.

W rozdziale 2 omówimy dwuczynnikowy gaussowski model chwilowej stopy procentowej $G2++$ i metodę estymacji opartą na funkcji wiarygodności. W rozdziale 3 wprowadzimy dwuczynnikowy model chwilowej stopy procentowej typu $G2++$ z dowolnym rozkładem czynników w mierze rzeczywistej i zaproponujemy kalibrację modelu, wykorzystując funkcję quasi-wiarygodności. W rozdziale 4 przedstawimy wyniki kalibracji naszego modelu dla polskiego rynku oraz analizę dopasowania modelu w mierze rzeczywistej i neutralnej względem ryzyka. W rozdziale 5 zaprezentujemy prognozę krzywej dochodowości rentowności polskich obligacji w perspektywie jednego roku i pokażemy, jak wyznaczyć wartość rynkową przykładowego portfela obligacji oraz wymóg kapitałowy z tytułu ryzyka stopy procentowej dla portfela obligacji.

2. Dwuczynnikowy gaussowski model chwilowej stopy procentowej G2++

W rozdziale 2.1 wprowadzimy dwuczynnikowy gaussowski model chwilowej stopy procentowej G2++ i przedstawimy podstawowe własności chwilowej stopy procentowej oraz jej czynników, które są potrzebne w procesie estymacji i analizy wyników modelu G2++. Szczegółowy opis dwuczynnikowego gaussowskiego modelu G2++, wraz ze wszystkimi podanymi poniżej formułami matematycznymi, można znaleźć np. w pracy: Brigo, Mercurio (2006, rozdz. 4). W rozdziale 2.1 korzystamy z podstawowych pojęć matematyki finansowej i procesów stochastycznych, które są dobrze wyjaśnione np. w książkach Werona i Werona (1999) lub Jakubowskiego i in. (2003). W rozdziale 2.2 omówimy metodę estymacji parametrów dwuczynnikowego gaussowskiego modelu G2++ przy użyciu funkcji wiarygodności, która została zaproponowana w pracach: Fisher, Gilles (1996), Duffee (2002), Ait-Sahalia, Kimmel (2010), i którą zastosowaliśmy w naszym badaniu.

2.1. Dynamika chwilowej stopy procentowej i czynników chwilowej stopy procentowej w modelu G2++

W matematyce finansowej zakłada się, że dynamika wartości wolnego od ryzyka rachunku oszczędnościowego jest opisana równaniem:

$$\frac{dB(t)}{B(t)} = r(t)dt$$

gdzie r jest procesem wolnej od ryzyka chwilowej stopy procentowej.

Pojęcie wolnego od ryzyka rachunku oszczędnościowego ma charakter abstrakcyjny i nie należy utożsamiać rachunku B z rachunkiem w banku komercyjnym. Wolna od ryzyka chwilowa stopa procentowa również jest pojęciem abstrakcyjnym, ale stopę r często utożsamia się ze stopą *overnight*. W dwuczynnikowym modelu chwilowej stopy procentowej opisujemy chwilową stopę procentową r przy użyciu dwóch skorelowanych markowskich procesów x i y . Oznacza to, że w dwuczynnikowym modelu chwilowej stopy procentowej rentowności obligacji, a w konsekwencji struktura terminowa stóp procentowych oraz ceny wszystkich instrumentów pochodnych stopy procentowej zależą od bieżących wartości dwóch czynników x i y . Na potrzeby wyceny obligacji i instrumentów pochodnych oraz modelowania zmian struktury terminowej stóp procentowych w czasie musimy zdefiniować dynamikę chwilowej stopy procentowej i jej dwóch czynników w mierze neutralnej względem ryzyka i w mierze rzeczywistej.

Niech t oznacza moment analizy ceny obligacji, \bar{T} moment wykupu obligacji, $\tau = \bar{T} - t$ termin zapadalności obligacji, T^* horyzont czasowy badania.

W tym rozdziale rozważamy klasyczny dwuczynnikowy gaussowski model chwilowej stopy procentowej G2++. Tak jak Brigo i Mercurio (2006) zakładamy, że dynamika chwilowej stopy procentowej w mierze neutralnej względem ryzyka jest dana równaniami:

$$r(t) = x(t) + y(t) + \phi(t) \quad 0 \leq t \leq T^* \quad (2.1)$$

$$dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1^Q(t) \quad 0 \leq t \leq T^* \quad (2.2)$$

$$x(0) = r_0$$

$$dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_2^Q(t) \quad 0 \leq t \leq T^* \quad (2.3)$$

$$y(0) = 0$$

$$\phi(t) = \int_0^t \varepsilon e^{-a(t-v)} dv \quad 0 \leq t \leq T^* \quad (2.4)$$

gdzie (W_1^Q, W_2^Q) jest dwuwymiarowym ruchem Browna (w mierze neutralnej względem ryzyka) ze współczynnikami korelacji ρ , parametry $a, b, \sigma, \eta, \varepsilon$ są stałymi dodatnimi, natomiast $r_0 \in \mathbb{R}, \rho \in [-1, 1]$.

Można wykazać (Brigo, Mercurio 2006, rozdz. 4.2.5), że model G2++ (2.1)–(2.4) jest równoważny dwuczynnikowemu modelowi Vasicka, w którym dynamika chwilowej stopy procentowej opisana jest równaniami:

$$dr(t) = (\varepsilon + q(t) - ar(t))dt + \bar{\sigma} d\bar{W}_1^Q(t) \quad 0 \leq t \leq T^* \quad (2.5)$$

$$r(0) = r_0$$

$$dq(t) = -bq(t)dt + \bar{\eta} d\bar{W}_2^Q(t) \quad 0 \leq t \leq T^* \quad (2.6)$$

$$q(0) = 0$$

gdzie $(\bar{W}_1^Q, \bar{W}_2^Q)$ jest dwuwymiarowym ruchem Browna (w mierze neutralnej względem ryzyka) ze współczynnikami korelacji $\bar{\rho}$ oraz

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma^2 + \eta^2 + 2\rho\sigma\eta}, \quad \bar{\eta} = \eta(a - b), \quad \bar{\rho} = \frac{\sigma\rho + \eta}{\bar{\sigma}}$$

Parametry modelu (2.5)–(2.6) są łatwiejsze do zinterpretowania niż parametry modelu (2.1)–(2.4). W zastosowaniach praktycznych może jednak wystąpić potrzeba estymacji trzyczynnikowego modelu chwilowej stopy procentowej i wtedy model (2.1)–(2.4) może być w prosty sposób poszerzony o trzeci czynnik.

Cena wolnej od ryzyka kredytowego obligacji zerokuponowej w chwili t z momentem wykupu \bar{T} (z terminem zapadalności $\tau = \bar{T} - t$) w modelu G2++ (2.1)–(2.4) jest dana wzorem:

$$P(\mathbf{U}_t, t, \bar{T}, \theta) = E^Q \left[e^{-\int_t^{\bar{T}} r(v) dv} |x(t), y(t) \right] \quad (2.7)$$

$$= \exp[-\gamma_0(t, \tau, \theta) - \gamma(\tau, \theta)^T \mathbf{U}_t] \quad 0 \leq t \leq \bar{T} \leq T^*$$

gdzie:

$$\mathbf{U}_t = [x(t), y(t)]^T$$

$$\boldsymbol{\theta} = [a, b, \sigma, \eta, \rho, \varepsilon]^T$$

$$\boldsymbol{\gamma}(\tau, \boldsymbol{\theta}) = \left[\frac{1 - e^{-a\tau}}{a}, \frac{1 - e^{-b\tau}}{b} \right]^T$$

$$\begin{aligned} \gamma_0(t, \tau, \boldsymbol{\theta}) = & \frac{\varepsilon}{a} \left(\tau + \frac{e^{-at}}{a} (e^{-a\tau} - 1) \right) - \\ & - \frac{\sigma^2}{2a^2} \left(\tau + \frac{2}{a} e^{-a\tau} - \frac{1}{2a} e^{-2a\tau} - \frac{3}{2a} \right) - \frac{\eta^2}{2b^2} \left(\tau + \frac{2}{b} e^{-b\tau} - \frac{1}{2b} e^{-2b\tau} - \frac{3}{2b} \right) \\ & - \rho \frac{\sigma\eta}{ab} \left(\tau + \frac{e^{-a\tau} - 1}{a} + \frac{e^{-b\tau} - 1}{b} - \frac{e^{-(a+b)\tau} - 1}{a+b} \right) \end{aligned}$$

Ze wzoru (2.7) wynika, że rentowność obligacji z terminem zapadalności τ przed urocznieniem jest funkcją afiniczną czynników $x(t)$ oraz $y(t)$, tzn.:

$$g(\mathbf{U}_t, t, \tau, \boldsymbol{\theta}) = -\ln [P(\mathbf{U}_t, t, t + \tau, \boldsymbol{\theta})] = \gamma_0(t, \tau, \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\gamma}(\tau, \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{U}_t \quad 0 \leq t \leq \bar{T} \leq T^* \quad (2.8)$$

Rentowność obligacji w stosunku rocznym wyraża się wzorem $[g(\mathbf{U}_t, t, \tau, \boldsymbol{\theta})]/\tau$. W tej pracy zawsze rozważamy i przedstawiamy rentowności przy kapitalizacji ciągłej. Funkcja $\tau \rightarrow [g(\mathbf{U}_t, t, \tau, \boldsymbol{\theta})]/\tau$ opisuje strukturę terminową wolnych od ryzyka stóp procentowych na moment t . Zauważmy, że:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{g(\mathbf{U}_t, t, \tau, \boldsymbol{\theta})}{\tau} = r(t), \quad 0 \leq t \leq \bar{T} \leq T^* \quad (2.9)$$

W celu przeanalizowania historycznych zmian rentowności obligacji i struktury terminowej stóp procentowych musimy zdefiniować dynamikę chwilowej stopy procentowej w mierze rzeczywistej, która jest równoważną miarą probabilistyczną dla miary neutralnej względem ryzyka. Z matematycznego punktu widzenia musimy zastosować technikę zamiany miary probabilistycznej dla ruchów Browna, które pojawiają się w równaniach (2.2)–(2.3). Zgodnie z twierdzeniem Girsanowa proces W jest ruchem Browna względem pewnej miary probabilistycznej równoważnej mierze neutralnej względem ryzyka Q , jeżeli ma postać:

$$dW(t) = dW^Q(t) - \pi(t) dt \quad (2.10)$$

gdzie π jest pewnym procesem stochastycznym.

Stosując (2.10) w równaniach (2.2)–(2.3), dostaniemy dynamiki czynników x i y w mierze równoważnej. Proces π należy wybrać tak, aby dynamiki czynników x i y w mierze rzeczywistej najlepiej wyjaśniały zaobserwowane zmiany struktury terminowej stóp procentowych. Oczywiście na potrzeby

estymacji modelu G2++ musimy ustalić postać procesu π . Dwie najprostsze możliwości, które zapewniają, że dynamiki czynników x i y w mierze rzeczywistej będą miały taką samą postać jak dynamiki w mierze neutralnej względem ryzyka, to wybór $\pi_1(t) = \lambda_1$ lub $\pi_1(t) = \lambda_1 \sqrt{x(t)}$ (i analogicznie dla $\pi_2(t)$). W naszym badaniu wybraliśmy $\pi_1(t) = \lambda_1$ i $\pi_2(t) = \lambda_2$. Formę zamiany miary wybrali również Dai i Singleton (2000), Ait-Sahalia i Kimmel (2010) oraz Stamirowski (2003).

Dynamika procesu chwilowej stopy procentowej w mierze rzeczywistej jest więc dana równaniami:

$$r(t) = x(t) + y(t) + \phi(t) \quad 0 \leq t \leq T^* \quad (2.11)$$

$$dx(t) = (\lambda_1 \sigma - ax(t))dt + \sigma dW_1(t) \quad 0 \leq t \leq T^* \quad (2.12)$$

$$x(0) = r_0$$

$$dy(t) = (\lambda_2 \eta - by(t))dt + \eta dW_2(t) \quad 0 \leq t \leq T^* \quad (2.13)$$

$$y(0) = 0$$

$$\phi(t) = \int_0^t \varepsilon e^{-a(t-v)} dv \quad 0 \leq t \leq T^* \quad (2.14)$$

gdzie (W_1, W_2) jest dwuwymiarowym ruchem Browna (w mierze rzeczywistej) ze współczynnikiem korelacji ρ .

Warunkowy rozkład zmiennej $U_t = [x(t), y(t)]^T$ pod warunkiem $U_s = [x(s), y(s)]^T$ w mierze rzeczywistej jest dwuwymiarowym rozkładem normalnym o parametrach:

$$\begin{aligned} E\{x(t)|x(s)\} &= \mu_x(s, t, \tilde{\theta}) = x(s)e^{-a(t-s)} + \frac{\lambda_1 \sigma}{a}(1 - e^{-a(t-s)}) & 0 \leq s \leq t \leq T^* \\ E\{y(t)|y(s)\} &= \mu_y(s, t, \tilde{\theta}) = y(s)e^{-b(t-s)} + \frac{\lambda_2 \eta}{b}(1 - e^{-b(t-s)}) & 0 \leq s \leq t \leq T^* \\ \text{Var}\{x(t)|x(s)\} &= \sigma_x^2(s, t, \tilde{\theta}) = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t-s)}) & 0 \leq s \leq t \leq T^* \\ \text{Var}\{y(t)|y(s)\} &= \sigma_y^2(s, t, \tilde{\theta}) = \frac{\eta^2}{2b}(1 - e^{-2b(t-s)}) & 0 \leq s \leq t \leq T^* \\ \text{cov}\{x(t), y(t)|x(s), y(s)\} &= \text{cov}_{xy}(s, t, \tilde{\theta}) = \rho \frac{\sigma \eta}{a+b}(1 - e^{-(a+b)(t-s)}) & 0 \leq s \leq t \leq T^* \end{aligned} \quad (2.15)$$

gdzie $\tilde{\theta} = [a, b, \sigma, \eta, \rho, \varepsilon, \lambda_1, \lambda_2]^T = [\theta^T, \lambda_1, \lambda_2]^T$.

Warto wyjaśnić, jaką rolę odgrywają parametry (λ_1, λ_2) z ekonomicznego punktu widzenia. Mówimy, że parametry (λ_1, λ_2) odzwierciedlają rynkowe premie za ryzyko związane z inwestycją w obligacje w stosunku do inwestycji na rachunku oszczędnościowym, na którym zarabiamy wolną od ryzyka chwilową stopę procentową. Miara neutralna względem ryzyka to taka miara, względem której zdys-

kontowany proces kształtowania się ceny obligacji jest martyngałem. Ponieważ modelujemy chwilową stopę procentową, czynnik dyskontujący za okres $[0, t]$ przyjmuje postać:

$$e^{-\int_0^t r(v)dv}$$

Z twierdzenia o reprezentacji martyngału wynika, że zdyskontowany proces kształtowania się ceny obligacji o terminie wykupu \bar{T} musi być opisany równaniem:

$$\frac{d\left(e^{-\int_0^t r(v)dv} P(t, \bar{T})\right)}{\left(e^{-\int_0^t r(v)dv} P(t, \bar{T})\right)} = \vartheta_1(t) dW_1^Q(t) + \vartheta_2(t) dW_2^Q(t) \quad 0 \leq t \leq \bar{T}$$

Stosując formułę Itô do wzoru (2.7), możemy wywnioskować, że:

$$\begin{aligned} \frac{dP(t, \bar{T})}{P(t, \bar{T})} &= r(t) dt \\ &- \gamma(\bar{T} - t, \boldsymbol{\theta}; 1) \sigma dW_1^Q(t) - \gamma(\bar{T} - t, \boldsymbol{\theta}; 2) \eta dW_2^Q(t) \quad 0 \leq t \leq \bar{T} \end{aligned} \quad (2.16)$$

gdzie $\gamma(\bar{T} - t, \boldsymbol{\theta}; 1), \gamma(\bar{T} - t, \boldsymbol{\theta}; 2)$ są odpowiednio pierwszymi i drugimi składowymi wektora $\boldsymbol{\gamma}(\bar{T} - t, \boldsymbol{\theta})$.

Wprowadzenie dynamiki (2.16) w przypadku modelu jednoczynnikowego można znaleźć np. w książce Jakubowskiego i in. (2003, s. 230). Dokonując zamiany miary neutralnej względem ryzyka na miarę rzeczywistą w równaniu (2.16), zgodnie z równaniami (2.12)–(2.13), dostajemy dynamikę ceny obligacji:

$$\begin{aligned} \frac{dP(t, \bar{T})}{P(t, \bar{T})} &= \left(r(t) - \gamma(\bar{T} - t, \boldsymbol{\theta}; 1) \sigma \lambda_1 - \gamma(\bar{T} - t, \boldsymbol{\theta}; 2) \eta \lambda_2 \right) dt - \\ &- \gamma(\bar{T} - t, \boldsymbol{\theta}; 1) \sigma dW_1(t) - \gamma(\bar{T} - t, \boldsymbol{\theta}; 2) \eta dW_2(t) \quad 0 \leq t \leq \bar{T} \end{aligned}$$

Widzimy teraz, że wyrażenie $-\gamma(\bar{T} - t, \boldsymbol{\theta}; 1) \sigma \lambda_1 - \gamma(\bar{T} - t, \boldsymbol{\theta}; 2) \eta \lambda_2$ opisuje chwilową premię za ryzyko związaną z inwestycją w obligację o terminie zapadalności $\bar{T} - t$, tzn. nadwyżkę w chwili t oczekiwanej chwilowej stopy zwrotu z inwestycji w obligację o terminie zapadalności $\bar{T} - t$ nad wolną od ryzyka chwilową stopą procentową, którą możemy zarobić na rachunku oszczędnościowym. Wyrażenie to powinno przyjąć wartość dodatnią, tzn. parametry λ_1, λ_2 powinny być ujemne.

Rozważmy następujące wyrażenie:

$$E \left[\frac{e^{-\int_t^{\bar{T}} r(v)dv}}{E^Q \left[e^{-\int_t^{\bar{T}} r(v)dv} \mid x(t), y(t) \right]} \mid x(t), y(t) \right] \quad (2.17)$$

Zauważmy, że

$1/E^Q \left[e^{-\int_t^{\bar{T}} r(v) dv} \mid x(t), y(t) \right]$ określa całkowitą stopę zwrotu z inwestycji w obligację o terminie zapadalności $\bar{T} - t$.

Z kolei $e^{-\int_t^{\bar{T}} r(v) dv}$ określa całkowitą stopę zwrotu z inwestycji na wolnym od ryzyka rachunku oszczędnościowym w okresie od t do \bar{T} .

W konsekwencji wyrażenie (2.17) opisuje całkowitą premię za ryzyko związaną z inwestycją w obligację o terminie zapadalności $\bar{T} - t$, tzn. oczekiwaną całkowitą nadwyżkę stopy zwrotu z inwestycji w obligację o terminie zapadalności $\bar{T} - t$ w porównaniu ze stopą zwrotu uzyskaną w wyniku inwestycji na rachunku oszczędnościowym zgodnie z wolną od ryzyka chwilową stopą procentową w tym samym okresie. Oczywiście liczymy wartość oczekiwaną w (2.17) względem miary rzeczywistej, ponieważ interesuje nas rzeczywisty zysk, który osiągniemy. W modelu G2++, wykorzystując (2.15), otrzymujemy zależność:

$$r(v) = r^Q(v) + \frac{\lambda_1 \sigma}{a} (1 - e^{-a(v-t)}) + \frac{\lambda_2 \eta}{b} (1 - e^{-b(v-t)}) \quad 0 \leq t \leq v \leq T^*$$

gdzie stopa r^Q opisana jest za pomocą dynamik (2.1)–(2.4) i zadanych wartości startowych $x(t), y(t)$. Dostaniemy więc:

$$E \left[e^{-\int_t^{\bar{T}} r(v) dv} \mid x(t), y(t) \right] = e^{-\int_t^{\bar{T}} (\gamma(\bar{T}-v, \boldsymbol{\theta}; 1) \sigma \lambda_1 + \gamma(\bar{T}-v, \boldsymbol{\theta}; 2) \eta \lambda_2) dv} E^Q \left[e^{-\int_t^{\bar{T}} r^Q(v) dv} \mid x(t), y(t) \right]$$

Ostatecznie całkowita premia za ryzyko związaną z inwestycją w obligację o terminie zapadalności $\bar{T} - t$ w dwuczynnikowym gaussowskim modelu G2++ wynosi:

$$E \left[\frac{e^{-\int_t^{\bar{T}} r(v) dv}}{E^Q \left[e^{-\int_t^{\bar{T}} r^Q(v) dv} \mid x(t), y(t) \right]} \mid x(t), y(t) \right] = e^{-\int_t^{\bar{T}} (\gamma(\bar{T}-v, \boldsymbol{\theta}; 1) \sigma \lambda_1 + \gamma(\bar{T}-v, \boldsymbol{\theta}; 2) \eta \lambda_2) dv} \quad (2.18)$$

Jest to zgodne z wcześniejszą interpretacją wyrażenia $-\gamma(\bar{T} - t, \boldsymbol{\theta}; 1) \sigma \lambda_1 - \gamma(\bar{T} - t, \boldsymbol{\theta}; 2) \eta \lambda_2$ jako chwilowej premii za ryzyko. W pracy będziemy estymowali wyrażenie:

$$\ln \left(\frac{E \left[\frac{e^{-\int_t^{\bar{T}} r(v) dv}}{E^Q \left[e^{-\int_t^{\bar{T}} r^Q(v) dv} \mid x(t), y(t) \right]} \mid x(t), y(t) \right]}{\bar{T} - t} \right) \quad (2.19)$$

co odpowiada urocznionej premii za ryzyko przy kapitalizacji ciągłej.

2.2 Estymacja modelu G2++ metodą największej wiarygodności

Dane wejściowe stanowi szereg czasowy cen obligacji lub rentowności obligacji o terminach zapadalności $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_K$. O ile nie wskazano inaczej, przez rentowności obligacji będziemy rozumieć rentowności przed urocznieniem przy kapitalizacji ciągłej (patrz wzór 2.8). Model G2++ dopasowujemy w ten sposób, żeby rentowności obligacji w oszacowanym modelu dla dwóch wybranych terminów zapadalności τ_1, τ_2 dokładnie replikowały historyczne rentowności tych obligacji oraz aby rentowności obligacji w oszacowanym modelu dla pozostałych terminów zapadalności τ_3, \dots, τ_K były możliwie blisko historycznych rentowności tych obligacji.

Rozważmy najpierw szereg czasowy rentowności g obligacji o wybranych dwóch terminach zapadalności τ_1 oraz τ_2 . Dysponując rentownościami obligacji w chwili t dla dwóch terminów zapadalności, τ_1 oraz τ_2 , możemy uzyskać wartości nieobserwowanych czynników $x(t)$ oraz $y(t)$. Posługujemy się równaniem (2.8). Musimy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} g(\mathbf{U}_t, t, \tau_1, \boldsymbol{\theta}) = \gamma_0(t, \tau_1, \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\gamma}(\tau_1, \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{U}_t \\ g(\mathbf{U}_t, t, \tau_2, \boldsymbol{\theta}) = \gamma_0(t, \tau_2, \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\gamma}(\tau_2, \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{U}_t \end{cases}$$

Dostajemy wektor wartości czynników:

$$\mathbf{U}_t = [\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta})]^{-1} [\mathbf{g}_t - \boldsymbol{\Gamma}_0(t, \boldsymbol{\theta})] \quad (2.20)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\theta}) &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}(\tau_1, \boldsymbol{\theta})^T \\ \boldsymbol{\gamma}(\tau_2, \boldsymbol{\theta})^T \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\Gamma}_0(t, \boldsymbol{\theta}) &= \begin{bmatrix} \gamma_0(t, \tau_1, \boldsymbol{\theta}) \\ \gamma_0(t, \tau_2, \boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \\ \mathbf{g}_t &= \begin{bmatrix} g(\mathbf{U}_t, t, \tau_1, \boldsymbol{\theta}) \\ g(\mathbf{U}_t, t, \tau_2, \boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kolejnym krokiem jest znalezienie rozkładu prawdopodobieństwa (w mierze rzeczywistej) dla wektora rentowności \mathbf{g}_t . Niech t i s będą dwoma momentami czasu i $s \leq t$. Znamy warunkowy rozkład prawdopodobieństwa wektora \mathbf{U}_t pod warunkiem \mathbf{U}_s . Na podstawie (2.15) ma on dwuwymiarowy rozkład normalny o wektorze wartości oczekiwanych \mathbf{M} oraz macierzy wariancji-kowariancji $\boldsymbol{\Sigma}$:

$$\mathbf{M}(s, t, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} \mu_x(s, t, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \\ \mu_y(s, t, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \end{bmatrix} \quad 0 \quad s \quad t \quad T \quad (2.21)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}(s, t, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} \sigma_x^2(s, t, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) & \text{cov}_{xy}(s, t, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \\ \text{cov}_{xy}(s, t, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) & \sigma_y^2(s, t, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \end{bmatrix} \quad 0 \quad s \quad t \quad T$$

Dzięki (2.20) znamy także zależność pomiędzy zmienną losową U_t a rentownościami obligacji \mathbf{g}_t . Możemy więc wyznaczyć warunkowy rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej U_t pod warunkiem \mathbf{g}_s , wykorzystując twierdzenie o odwzorowaniu gładkim dla zmiennych losowych o zadanej funkcji gęstości (Jakubowski, Sztencel 2001, rozdz. 5.5). Funkcja gęstości f_g rozkładu warunkowego $\mathbf{g}_t/\mathbf{g}_s$ ma postać:

$$f_g(\mathbf{g}_t | \mathbf{g}_s) = f_U([\mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{\theta})]^{-1}[\mathbf{g}_t - \mathbf{\Gamma}_0(t, \boldsymbol{\theta})] | [\mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{\theta})]^{-1}[\mathbf{g}_s - \mathbf{\Gamma}_0(s, \boldsymbol{\theta})]) \times \\ \times |\det \{[\mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{\theta})]^{-1}[\mathbf{g}_t - \mathbf{\Gamma}_0(t, \boldsymbol{\theta})]\}| \quad 0 \leq s < t \leq T$$

gdzie f_U jest funkcją gęstości rozkładu warunkowego U_t/U_s .

Licząc pochodną przekształcenia liniowego, dostajemy:

$$f_g(\mathbf{g}_t | \mathbf{g}_s) = f_U([\mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{\theta})]^{-1}[\mathbf{g}_t - \mathbf{\Gamma}_0(t, \boldsymbol{\theta})] | [\mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{\theta})]^{-1}[\mathbf{g}_s - \mathbf{\Gamma}_0(s, \boldsymbol{\theta})]) \times |\det[\mathbf{\Gamma}(\boldsymbol{\theta})]^{-1}| \quad 0 \leq s < t \leq T$$

Po podstawieniu funkcji gęstości rozkładu normalnego z parametrami (2.21) oraz wprowadzeniu rozszerzonego zbioru parametrów $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ funkcja gęstości $f_g(\mathbf{g}_t/\mathbf{g}_s)$ dana jest wzorem:

$$f_g(\mathbf{g}_t | \mathbf{g}_s) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \boldsymbol{\Sigma}(s, t, \tilde{\boldsymbol{\theta}})}} \times \quad (2.22) \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{U}_t - \mathbf{M}(s, t, \tilde{\boldsymbol{\theta}}))^T \boldsymbol{\Sigma}(s, t, \tilde{\boldsymbol{\theta}})^{-1}(\mathbf{U}_t - \mathbf{M}(s, t, \tilde{\boldsymbol{\theta}}))\right) \times |\det[\mathbf{\Gamma}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})]^{-1}| \quad 0 \leq s < t \leq T$$

gdzie:

$$\mathbf{U}_t = [\mathbf{\Gamma}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})]^{-1} [\mathbf{g}_t - \mathbf{\Gamma}_0(t, \tilde{\boldsymbol{\theta}})]$$

Licząc granicę $t \rightarrow \infty$ we wzorach (2.21), otrzymamy momenty rozkładu stacjonarnego rozkładu $f_g(\mathbf{g})$ o postaci:

$$\mathbf{M}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} \mu_x(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \\ \mu_y(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 \sigma}{a} \\ \frac{\lambda_2 \eta}{b} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\Sigma}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{bmatrix} \sigma_x^2(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) & \text{cov}_{xy}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \\ \text{cov}_{xy}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) & \sigma_y^2(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{2a} & \rho \frac{\sigma \eta}{a+b} \\ \rho \frac{\sigma \eta}{a+b} & \frac{\eta^2}{2b} \end{bmatrix}$$

Ostatni etap to skonstruowanie funkcji wiarygodności dla szeregu czasowego rentowności obligacji. Załóżmy, że obserwujemy rentowności obligacji o terminach zapadalności τ_1 oraz τ_2 w momentach t_0, t_1, \dots, t_n . Wektory rentowności dla tych obligacji są równe $\mathbf{g}_{t_0}, \mathbf{g}_{t_1}, \dots, \mathbf{g}_{t_n}$. Po wykorzystaniu (2.22) funkcja wiarygodności dla szeregu rentowności obligacji o terminach zapadalności τ_1 oraz τ_2 w dwuczynnikowym gaussowskim modelu G2++ przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
L_{1,\tilde{\theta}}(\mathbf{g}_{t_0}, \mathbf{g}_{t_1}, \dots, \mathbf{g}_{t_n}) &= f_g(\mathbf{g}_{t_0}) \times \prod_{i=1}^n f_g(\mathbf{g}_{t_i} | \mathbf{g}_{t_{i-1}}) = \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma(\tilde{\theta})}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{U}_{t_0} - \mathbf{M}(\tilde{\theta}))^\top \Sigma(\tilde{\theta})^{-1}(\mathbf{U}_{t_0} - \mathbf{M}(\tilde{\theta}))\right) |\det[\Gamma(\tilde{\theta})]^{-1}| \times \\
&\times \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma(t_{i-1}, t_i, \tilde{\theta})}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{U}_{t_i} - \mathbf{M}(t_{i-1}, t_i, \tilde{\theta}))^\top \Sigma(t_{i-1}, t_i, \tilde{\theta})^{-1}(\mathbf{U}_{t_i} - \mathbf{M}(t_{i-1}, t_i, \tilde{\theta}))\right) \\
&\times |\det[\Gamma(\tilde{\theta})]^{-1}|
\end{aligned}$$

Zakładamy, że obserwacja \mathbf{g}_{t_0} pochodzi z rozkładu stacjonarnego. Logarytm funkcji wiarygodności jest równy:

$$\begin{aligned}
\ln [L_{1,\tilde{\theta}}(\mathbf{g}_{t_0}, \mathbf{g}_{t_1}, \dots, \mathbf{g}_{t_n})] &= \ln [f_g(\mathbf{g}_{t_0})] + \sum_{i=1}^n \ln [f_g(\mathbf{g}_{t_i} | \mathbf{g}_{t_{i-1}})] = \\
&= -(n+1) \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln [\det \Sigma(\tilde{\theta})] - \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{t_0} - \mathbf{M}(\tilde{\theta}))^\top \Sigma(\tilde{\theta})^{-1} (\mathbf{U}_{t_0} - \mathbf{M}(\tilde{\theta})) + \\
&\quad + (n+1) \times \ln [|\det[\Gamma(\tilde{\theta})]^{-1}|] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \ln [\det \Sigma(t_{i-1}, t_i, \tilde{\theta})] - \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{U}_{t_i} - \mathbf{M}(t_{i-1}, t_i, \tilde{\theta}))^\top \Sigma(t_{i-1}, t_i, \tilde{\theta})^{-1} (\mathbf{U}_{t_i} - \mathbf{M}(t_{i-1}, t_i, \tilde{\theta}))
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Rozważmy teraz szereg czasowy rentowności h obligacji o pozostałych terminach zapadalności τ_3, \dots, τ_K . Załóżmy, że obserwujemy rentowności obligacji o terminach zapadalności τ_3, \dots, τ_K w momentach t_0, t_1, \dots, t_n . Wektory rentowności tych obligacji są równe $\mathbf{h}_{t_0}, \mathbf{h}_{t_1}, \dots, \mathbf{h}_{t_n}$. Przy ustalonym zestawie parametrów $\tilde{\theta} = [a, b, \alpha, \eta, \rho, \varepsilon, \lambda_1, \lambda_2]^\top$ oraz wartościach procesu \mathbf{U}_t na podstawie (2.8) możemy wyznaczyć prognozowane rentowności tych obligacji zgodnie ze wzorem:

$$\hat{h}(\mathbf{U}_t, t, \tau, \theta) = \gamma_0(t, \tau, \theta) + \gamma(\tau, \theta)^\top \mathbf{U}_t \quad 0 \leq t \leq t + \tau \leq T^*, \quad \tau = \tau_3, \dots, \tau_K$$

Oczywiście tak wyznaczone rentowności \hat{h} nie będą się pokrywały z historycznymi rentownościami h . Przyjmujemy założenie, że dla każdego terminu zapadalności τ_j różnica pomiędzy zaobserwowaną urocznioną rentownością a prognozowaną urocznioną rentownością ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej zero i wariancji δ_j^2 . Dodatkowo zakładamy, że błędy dopasowań są niezależne w kolejnych okresach obserwacji i niezależne pomiędzy terminami zapadalności. Założenie dotyczące rentowności o terminach zapadalności τ_3, \dots, τ_K jest intuicyjnie jasne i zgodne z podejściem zaproponowanym przez Chena i Scotta (1993), według którego rentowności obligacji o terminach zapadalności τ_1, τ_2 są obserwowane bez błędów, natomiast rentowności obligacji o pozostałych terminach zapadalności τ_3, \dots, τ_K są obserwowane z błędami. Założenie to jest zgodne z powszechnym przekonaniem, że kwotowane ceny obligacji są narażone na szum rynkowy i są różne od cen fundamentalnych. Możemy więc zapisać funkcję wiarygodności dla szeregu rentowności obligacji $\mathbf{h}_{t_0}, \mathbf{h}_{t_1}, \dots, \mathbf{h}_{t_n}$ o terminach zapadalności τ_3, \dots, τ_K w momentach t_0, t_1, \dots, t_n . Otrzymujemy:

$$\ln \left[L_{2,\bar{\theta}}(\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n) \right] = -\frac{1}{2}(n+1)(K-3+1)\ln(2\pi) - (n+1) \sum_{j=3}^K \ln(\delta_j^2) -$$

$$-\sum_{i=0}^n \sum_{j=3}^K \left(\frac{\gamma_0(t_i, \tau_j, \boldsymbol{\theta}) + \gamma(\tau_j, \boldsymbol{\theta})^T \mathbf{U}_i - h(\mathbf{U}_i, t_i, \tau_j, \boldsymbol{\theta})}{\tau} \right)^2$$

$$2\delta_j^2 \quad (2.24)$$

Ostatecznie, logarytm funkcji wiarygodności dla szeregu czasowego rentowności obligacji o terminach zapadalności $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_K$ jest sumą logarytmów funkcji wiarygodności (2.23) i (2.24), tzn.:

$$\ln \left[L_{\tilde{\theta}}(\mathbf{g}_{t_0}, \mathbf{g}_{t_1}, \dots, \mathbf{g}_{t_n}, \mathbf{h}_{t_0}, \mathbf{h}_{t_1}, \dots, \mathbf{h}_{t_n}) \right] =$$

$$= \ln \left[L_{1,\bar{\theta}}(\mathbf{g}_{t_0}, \mathbf{g}_{t_1}, \dots, \mathbf{g}_{t_n}) \right] + \ln \left[L_{2,\bar{\theta}}(\mathbf{h}_{t_0}, \mathbf{h}_{t_1}, \dots, \mathbf{h}_{t_n}) \right] \quad (2.25)$$

gdzie $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = [a, b, \sigma, \eta, \rho, \varepsilon, \lambda_1, \lambda_2, \delta, \dots, \delta_K]^T$.

W celu wyznaczenia parametrów dwuczynnikowego gaussowskiego modelu chwilowej stopy procentowej G2++ maksymalizujemy funkcję (2.25) względem wektora parametrów $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$.

Podkreślmy, że badając rentowności obligacji w danym momencie, możemy wnioskować o parametrach modelu stopy procentowej w mierze neutralnej względem ryzyka (który jest potrzebny do wyceny aktywów i pasywów). W wyniku analizy zmian rentowności obligacji w czasie możemy wnioskować o parametrach modelu stopy procentowej w mierze rzeczywistej (który jest potrzebny do prognozowania zmian struktury terminowej stóp procentowych). Maksymalizując funkcję wiarygodności (2.25), dostajemy jednocześnie oszacowania parametrów dynamiki chwilowej stopy procentowej i dynamiki dwóch czynników x i y w mierze neutralnej względem ryzyka ($a, b, \sigma, \eta, \rho, \varepsilon$) i w mierze rzeczywistej ($a, b, \sigma, \eta, \rho, \varepsilon, \lambda_1, \lambda_2$). Parametry $(\delta_3, \dots, \delta_K)$ nie są wykorzystywane w modelu. Są one potrzebne do skonstruowania funkcji wiarygodności i opisują odchylenia standardowe błędów estymacji urocznionych rentowności obligacji o terminach zapadalności (τ_3, \dots, τ_K) w kolejnych momentach obserwacji. Parametry $(\delta_3, \dots, \delta_K)$ służą więc jedynie do oceny dopasowania modelu w mierze neutralnej względem ryzyka.

Powyżej przedstawiliśmy metodę estymacji dwuczynnikowego modelu chwilowej stopy procentowej. Model dwuczynnikowy może być rozszerzony do modelu trzyczynnikowego, który może być estymowany w analogiczny sposób (Ait-Sahalia, Kimmel 2010).

3. Dwuczynnikowy model chwilowej stopy procentowej typu G2++ z dowolnym rozkładem czynników w mierze rzeczywistej

Oszacowany dwuczynnikowy gaussowski model chwilowej stopy procentowej G2++ można wykorzystać do bieżącej wyceny aktywów i pasywów i do prognozowania krzywej dochodowości wyłącznie w sytuacji, gdy oszacowany model G2++ będzie dobrze dopasowany do danych, tzn. gdy czynniki x i y będą mogły być opisane dynamikami Vasicka w mierze neutralnej względem ryzyka (2.1)–(2.4) i w mierze rzeczywistej (2.11)–(2.14).

Rozważmy dopasowanie dwuczynnikowego gaussowskiego modelu chwilowej stopy procentowej G2++ w mierze neutralnej względem ryzyka. Będzie on dobrze dopasowany, jeżeli ceny obligacji wyznaczone zgodnie ze wzorem (2.7), przy parametrach otrzymanych w wyniku maksymalizacji funkcji (2.25), będą bliskie historycznym cenom obligacji dla wszystkich momentów t_0, t_1, \dots, t_n i terminów zapadalności $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_K$. Przedstawiona w poprzednim rozdziale metoda estymacji zapewnia, że ceny obligacji w oszacowanym modelu G2++ będą się pokrywały z historycznymi cenami obligacji dla terminów zapadalności τ_1, τ_2 . Błąd dopasowania cen obligacji należy więc zweryfikować dla obligacji o terminach zapadalności τ_3, \dots, τ_K . Dopasowanie dwuczynnikowego gaussowskiego modelu G2++ w mierze neutralnej względem ryzyka powinno być dobre, przynajmniej dla większości terminów zapadalności. Wiąże się to z faktem, że historycznie obserwowane krzywe dochodowości są gładkie, a funkcja $\tau \rightarrow g(\cdot, t, \tau, \theta)$ rentowności obligacji w modelu G2++ (2.8) jest na tyle elastyczna, że dopasowując ją do rentowności dla dwóch skrajnych terminów zapadalności τ_1, τ_2 , powinniśmy także móc odtworzyć (z małym błędem) rentowności dla terminów zapadalności pomiędzy τ_1 i τ_2 oraz bliskich τ_1, τ_2 .

Wątpimy jednak w dobre dopasowanie dwuczynnikowego gaussowskiego modelu chwilowej stopy procentowej G2++ w mierze rzeczywistej. Jeżeli dysponujemy danymi o rentownościach obligacji w momentach równo oddalonych od siebie o mały interwał czasowy Δ , to dynamiki czynników w czasie ciągłym (2.12)–(2.13) mogą być przybliżone przez równania rekurencyjne w czasie dyskretnym. Stosując schemat Eulera (Korn, Korn, Kroisandt 2010, rozdz. 4.7.3), dostaniemy następujące dynamiki czynników w mierze rzeczywistej:

$$\begin{aligned} x(t + \Delta) - x(t) &= (\lambda_1 \sigma - ax(t))\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\varepsilon_1(t) & t = t_0, \dots, t_{n-1} \\ x(0) &= r_0 \\ y(t + \Delta) - y(t) &= (\lambda_2 \eta - by(t))\Delta + \eta\sqrt{\Delta}\varepsilon_2(t) & t = t_0, \dots, t_{n-1} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

gdzie $(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t))_{t=t_0, \dots, t_{n-1}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o dwuwymiarowym standardowym rozkładzie normalnym i współczynnikiem korelacji ρ .

Metoda estymacji dostarczy nam oszacowania czynników \hat{x} i \hat{y} . Dwuczynnikowy gaussowski model G2++ będzie więc dobrze dopasowany w mierze rzeczywistej, jeżeli przy oszacowanych parametrach reszty

$$\begin{aligned} R_1(t) &= \frac{\hat{x}(t + \Delta) - \hat{x}(t) - (\hat{\lambda}_1 \hat{\sigma} - \hat{a}\hat{x}(t))\Delta}{\hat{\sigma}\sqrt{\Delta}} & t = t_0, \dots, t_{n-1} \\ R_2(t) &= \frac{\hat{y}(t + \Delta) - \hat{y}(t) - (\hat{\lambda}_2 \hat{\eta} - \hat{b}\hat{y}(t))\Delta}{\hat{\eta}\sqrt{\Delta}} & t = t_0, \dots, t_{n-1} \end{aligned} \quad (3.1)$$

będą tworzyły ciąg niezależnych zmiennych losowych o dwuwymiarowym standardowym rozkładzie normalnym i współczynnikiem korelacji $\hat{\rho}$.

Spodziewamy się, że warunek ten nie będzie spełniony w praktyce, ponieważ zmiany struktury terminowej stóp procentowych w czasie mogą być generowane przez mechanizm losowy bardziej wyrafinowany niż dwuwymiarowy rozkład normalny. Proponujemy zatem wykorzystanie dwuczynniko-

wego modelu chwilowej stopy procentowej typu G2++ z dowolnym rozkładem czynników i zastosowanie metody quasi-wiarogodności.

Metodę quasi-wiarogodności zaproponował White (1982) i obecnie stanowi ona standardową metodę estymacji szeregów czasowych. Estymacja szeregu czasowego z wykorzystaniem metody quasi-wiarogodności polega na tym, że najpierw szacowane są parametry szeregu czasowego przy założeniu, że składnik losowy jest z rozkładu normalnego, a następnie dopasowywany jest odpowiedni rozkład do reszt w modelu szeregu czasowego (np. McNeil, Frey, Embrechts 2005, rozdz. 4.3.3). Proponujemy zastosowanie takiego samego podejścia do kalibracji dwuczynnikowego modelu chwilowej stopy procentowej typu G2++ z dowolnym rozkładem czynników w mierze rzeczywistej. Gdy wykorzystujemy metodę największej quasi-wiarogodności, funkcja (2.25) nie jest prawdziwą funkcją wiarogodności obserwacji, lecz jedynie kryterium optymalizacyjnym zbliżonym do funkcji wiarogodności. W konsekwencji, stosując metodę największej quasi-wiarogodności, należy zadbać o sprawdzenie, czy wyniki kalibracji są sensowne.

Podsumowując, w pracy tej jako model struktury terminowej stóp procentowych proponujemy dwuczynnikowy model chwilowej stopy procentowej typu G2++ z dowolnym rozkładem czynników w mierze rzeczywistej. W naszym modelu cena wolnej od ryzyka kredytowego obligacji zerokuponowej o terminie zapadalności τ dana jest wzorem (2.7), czyli:

$$P(\mathbf{U}_t, t, t + \tau, \theta) = \exp[-\gamma_0(t, \tau, \theta) - \boldsymbol{\gamma}(\tau, \theta)^T \mathbf{U}_t] \quad t = t_0, \dots, t_n$$

Z kolei dynamiki czynników x i y w mierze rzeczywistej dane są równaniami:

$$x(t + \Delta) - x(t) = (\lambda_1 \sigma - ax(t))\Delta + \sigma \sqrt{\Delta} Z_1(t) \quad t = t_0, \dots, t_{n-1} \quad (3.2)$$

$$x(0) = r_0$$

$$y(t + \Delta) - y(t) = (\lambda_2 \eta - by(t))\Delta + \eta \sqrt{\Delta} Z_2(t) \quad t = t_0, \dots, t_{n-1} \quad (3.3)$$

$$y(0) = 0$$

gdzie $(Z_1(t), Z_2(t))_{t=t_0, \dots, t_{n-1}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o dowolnym dwuwymiarowym rozkładzie.

Parametry $(a, b, \sigma, \eta, \rho, \varepsilon, \lambda_1, \lambda_2)$ są kalibrowane przez maksymalizację funkcji quasi-wiarogodności (2.25), a parametry dwuwymiarowego rozkładu (Z_1, Z_2) są kalibrowane w wyniku analizy statystycznej otrzymanych reszt (3.1). Używamy teraz określenia „kalibracja”, a nie „estymacja”, ponieważ wydaje się bardziej odpowiednie w zaproponowanej metodzie. W szczególności zwracamy uwagę, że statystyczna metoda quasi-wiarogodności opiera się na pewnych założeniach, których nie sprawdzamy w tej pracy. W funkcji quasi-wiarogodności (2.25) warunkowe momenty wyznaczone w modelu z czasem ciągłym z ruchem Browna (2.12)-(2.13) możemy zastąpić, stosując dyskretyzację Eulera, warunkowymi momentami wyznaczonymi w modelu z czasem dyskretnym z dowolnym rozkładem szumu (3.2)–(3.3). Dla małego interwału czasowego Δ różnica między warunkowymi momentami czynników x i y w modelu ciągłym i dyskretnym będzie zaniedbywalna.

Usunięcie założenia, że dwuwymiarowy rozkład normalny generuje zmiany krzywej dochodowości w czasie, jest kluczowe dla wielu zastosowań praktycznych. Wybierając najlepszy możliwy rozkład

dla czynników x i y , możemy teraz generować realistyczne zmiany krzywej dochodowości w przyszłości, odpowiadające zmianom zaobserwowanym w przeszłości, i wyznaczyć poprawny wymóg kapitałowy z tytułu ryzyka stopy procentowej. Nasza modyfikacja dwuczynnikowego gaussowskiego modelu chwilowej stopy procentowej G2++ zapewnia więc lepsze dopasowanie modelu w mierze rzeczywistej i poszerza obszar zastosowań modelu. Jednocześnie zwracamy uwagę, że nasz dwuczynnikowy model chwilowej stopy procentowej typu G2++ (tak jak gaussowski model G2++) jest kalibrowany w mierze neutralnej względem ryzyka wyłącznie na podstawie cen obligacji. Ponieważ wypłaty i ceny obligacji nie zależą od łącznego rozkładu stóp dla różnych terminów zapadalności, tak oszacowany model w mierze neutralnej względem ryzyka nie powinien być wykorzystywany do wyceny instrumentów z wypłatami zależnymi od łącznego rozkładu stóp dla różnych terminów zapadalności (Brigo, Mercurio 2006, rozdziały 4.1 i 4.2.7). Nasz model chwilowej stopy procentowej typu G2++ w mierze neutralnej względem ryzyka, oszacowany zgodnie z opisaną powyżej metodą, możemy więc wykorzystać do wyceny stałych przepływów (kuponów, nominałów obligacji, świadczeń z tytułu zgonu lub przeżycia w ubezpieczeniach na życie) instrumentów typu *cap*, *caplet*, *floor*, *floorlet*, ale nie powinniśmy go stosować do wyceny instrumentów typu *swap*cja.

Metoda największej quasi-wiarogodności i zaproponowana metoda kalibracji dwuczynnikowego modelu chwilowej stopy procentowej typu G2++ z dowolnym rozkładem czynników w mierze rzeczywistej nie są optymalne. Z punktu widzenia statystyki lepszym rozwiązaniem byłoby zdefiniowanie dynamik (2.12)–(2.13) w czasie ciągłym dzięki zastąpieniu ruchu Browna procesem procesem Lévy'ego, dla którego znamy w postaci zamkniętej (lub potrafimy przybliżyć) funkcję gęstości przejścia (np. Hainaut, MacGilchrist 2010). W takim modelu z procesem Lévy'ego moglibyśmy zapisać prawdziwą funkcję wiarogodności dla naszych obserwacji. Dodatkowo, afiniczna postać ceny obligacji (2.8) występuje w przypadku szerszej klasy procesów stopy procentowej (Duffi, Filipovic, Schachermayer 2003), w szczególności gdy w równaniach (2.12)–(2.13) zastąpimy ruch Browna procesem Lévy'ego. W konsekwencji wyniki z rozdziału 2.2 można rozszerzyć na przypadek modelu z procesem Lévy'ego. Uważamy jednak, że nasze podejście z funkcją quasi-wiarogodności jest zdecydowanie prostsze do stosowania i – jak pokażemy w następnym rozdziale – daje rozsądne wyniki.

4. Wyniki kalibracji dwuczynnikowego modelu chwilowej stopy procentowej typu G2++ z dowolnym rozkładem czynników w mierze rzeczywistej dla rynku polskiego

W tym rozdziale przedstawimy szczegóły i ostateczne wyniki kalibracji zaproponowanego wcześniej dwuczynnikowego modelu chwilowej stopy procentowej typu G2++ dla rynku polskiego. Omówimy wybór danych do kalibracji modelu, procedurę maksymalizacji funkcji quasi-wiarogodności i sposób oszacowania dwuwymiarowego rozkładu czynników x i y w mierze rzeczywistej oraz ocenimy stopień dopasowania ostatecznego modelu w mierze rzeczywistej i neutralnej względem ryzyka.

4.1. Wybór danych do kalibracji modelu

Zgodnie z wytycznymi Urzędu Nadzoru Ubezpieczeń i Pracowniczych Programów Emerytalnych (EIOPA 2017) do estymacji modelu struktury terminowej wolnych od ryzyka stóp procentowych w Polsce należy wykorzystywać dane z I177 CMPL Index z agencji prasowej Bloomberg. Są to dane o rentowności polskich obligacji skarbowych dla wybranych terminów zapadalności w stosunku rocznym przy kapitalizacji rocznej. Dysponowaliśmy dziennymi notowaniami rentowności obligacji skarbowych o terminach zapadalności 3 i 6 miesięcy, roku, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15 i 20 lat w okresie od 2 stycznia 2011 r. do 22 marca 2017 r. Zgodnie z założeniem przyjętym w tej pracy (patrz (2.8)–(2.9)), rentowności przy kapitalizacji rocznej zostały zamienione na rentowności przy kapitalizacji ciągłej.

Rentowności dla terminów zapadalności roku i 10 lat w okresie od 2 stycznia 2011 do 22 marca 2017 r. przedstawiono na wykresie 1a. Widać na nim wyraźne obniżenie się rentowności dla obu terminów zapadalności w analizowanym okresie. Wykorzystanie wszystkich dostępnych danych o rentowności z widocznym trendem spadkowym do estymacji modelu stopy procentowej byłoby sprzeczne z założeniem o stacjonarności procesów x i y wpływających na zmiany rentowności obligacji. Ostatni wyraźny trend spadkowy rentowności obligacji 10-letnich wystąpił pomiędzy styczniem 2014 a styczniem 2015 r. W konsekwencji zdecydowaliśmy się ustalić środek tego okresu, tzn. 1 lipca 2014 r., jako początek szeregu czasowego, który wykorzystaliśmy do estymacji modelu (patrz wykres 1b). W okresie od 1 lipca 2014 do 22 marca 2017 r. obserwowaliśmy wzrosty i spadki rentowności obligacji 10-letnich; rentowność obligacji 10-letniej na koniec okresu była bardzo podobna jak rentowność na początku okresu. Rentowność obligacji jednorocznej nadal malała w okresie od lipca 2014 do stycznia 2015 r., a następnie utrzymywała się na stałym poziomie. Ponieważ od 1 lipca 2014 do 22 marca 2017 r. rentowności obligacji 3-miesięcznych były identyczne jak rentowności obligacji 6-miesięcznych, te pierwsze zostały wykluczone z szeregu czasowego obserwacji użytych do estymacji modelu.

Następny krok polegał na wybraniu terminów zapadalności τ_1, τ_2 i rentowności, które determinują wartości nieobserwowanych czynników x i y zgodnie z (2.20). Zgodnie z intuicją termin zapadalności τ_1 powinien być krótki, termin zapadalności τ_2 – długi, a rentowności dla terminów zapadalności τ_1, τ_2 powinny być silnie skorelowane z rentownościami dla pozostałych terminów zapadalności. Według wytycznych EIOPA na polskim rynku obligacje skarbowe o terminach zapadalności powyżej 10 lat i poniżej roku nie są płynne, co stanowi dodatkowy argument za wyłączeniem obligacji 3-miesięcznych z analizy. W konsekwencji naturalny wybór to $\tau_1 = 1$ rok i $\tau_2 = 10$ lat. Dodatkowo wykresy 2a i 2b pokazują, że rentowności obligacji jednorocznych są silnie skorelowane i bardzo bliskie rentownościom obligacji 6-miesięcznych i 2-letnich oraz że rentowności obligacji 10-letnich są silnie skorelowane i bardzo bliskie rentownościom obligacji 5-letnich i 15-letnich (a także rentownościom obligacji o terminach zapadalności od 5 do 10 lat).

Podsumowując, wydaje nam się, że wybór 1 lipca 2014 r. jako daty startowej szeregu czasowego danych o rentowności wykorzystanych w estymacji naszego modelu stopy procentowej oraz wybór terminów zapadalności 1 rok i 10 lat do wyznaczenia wartości nieobserwowanych czynników x i y są najsensowniejsze w kontekście dostępnych danych. Oczywiście inne wybory są możliwe i pozostają w gestii osoby kalibrującej model.

Nasz szereg czasowy w okresie od 1 lipca 2014 do 22 marca 2017 r. składał się z 687 dziennych obserwacji rentowności dla terminów zapadalności: 6 miesięcy, roku, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15 i 20 lat. Odstępy czasu pomiędzy kwotowaniami rentowności nie były równe, w związku z weekendami i świę-

tami, co postanowiliśmy pominąć. Ustaliliśmy odstęp czasowy pomiędzy obserwacjami na poziomie $\Delta = 1/253$. Data początkowa szeregu czasowego, $t = 0$, przypada na 1 lipca 2014 r. Przy ustalonym odstępem czasowym $\Delta = 1/253$ $t = 1$ wypada 2 lipca 2015 r., a $t = 2$ 30 wypada czerwca 2016 r. Dacie końcowej szeregu czasowego (22 marca 2017 r.) odpowiada $t = 2,7115$.

Ostatni krok to eliminacja obserwacji odstających w szeregu czasowym rentowności. Na wykresie 1b widzimy wyraźny spadek rentowności obligacji 10-letniej, a na wykresie 2b – wyraźny wzrost rentowności obligacji 15-letniej. W sytuacji, gdy zmiany kwotowanych rentowności w ciągu dwóch kolejnych dni były większe niż 10% i miały przeciwne kierunki, zastępowaliśmy kwotowaną rentowność średnią z rentowności dla dni przyległych. W szeregu zidentyfikowaliśmy łącznie 9 wartości odstających dla wszystkich terminów zapadalności, które zostały odpowiednio zmodyfikowane.

4.2. Estymacja modelu metodą quasi-wiarogodności

Maksymalizacja funkcji (2.25) jest zadaniem trudnym z numerycznego punktu widzenia. Proponujemy następującą procedurę, którą zastosowaliśmy w naszym badaniu:

1. Zakładamy, że $\delta_{0,5Y} = \dots = \delta_{20Y} = \delta$. Generujemy wartości $(a, b, \sigma, \eta, \varepsilon)$ z niezależnych rozkładów jednostajnych z przedziału $[0; 1]$, wartości $(\rho, \lambda_1, \lambda_2)$ z niezależnych rozkładów jednostajnych z przedziału $[-1; 0]$ oraz wartość δ z rozkładu jednostajnego z przedziału $[0; 0,1]$. Nie spodziewamy się oszacowań parametrów poza zadanymi zakresami rozkładów jednostajnych.

2. Maksymalizujemy funkcję (2.25) względem $(a, b, \sigma, \eta, \rho, \varepsilon, \lambda_1, \lambda_2, \delta)$, traktując wartości z kroku 1 jako wartości startowe w problemie optymalizacyjnym. W badaniu wykorzystaliśmy dodatek Solver w Excelu do rozwiązania problemów optymalizacyjnych.

3. Kroki 1 i 2 powtarzamy kilkakrotnie i identyfikujemy zestaw parametrów $(a, b, \sigma, \eta, \rho, \varepsilon, \lambda_1, \lambda_2, \delta)$, otrzymanych w kroku 2, dla których funkcja (2.25) przyjęła największą wartość w serii rozwiązań problemu optymalizacyjnego. Kroki 1 i 2 powtórzyliśmy 50 razy; wyniki znajdują się w tabeli 1.

4. Ustalamy wartość δ na podstawie wyniku z kroku 3. W badaniu ustaliliśmy $\delta = 0,1\%$. Wszystkie pozostałe parametry $(a, b, \sigma, \eta, \rho, \varepsilon, \lambda_1, \lambda_2)$ otrzymane w kroku 3 są losowane ponownie z niezależnych rozkładów jednostajnych, których przedziały są ustalone jako $[0,5; 1,5]$ początkowej wartości parametru.

5. Ponownie maksymalizujemy funkcję (2.25) względem $(a, b, \sigma, \eta, \rho, \varepsilon, \lambda_1, \lambda_2)$, traktując wartości z kroku 4 jako wartości startowe w problemie optymalizacyjnym. Tym razem σ pozostaje na stałym poziomie ustalonym w kroku 4.

Kroki 4 i 5 powtarzamy kilkakrotnie i identyfikujemy zestaw parametrów $(a, b, \sigma, \eta, \rho, \varepsilon, \lambda_1, \lambda_2)$, otrzymanych w kroku 5, dla których funkcja (2.25) przyjęła największą wartość w serii rozwiązań problemu optymalizacyjnego. W badaniu kroki 4 i 5 powtórzyliśmy 50 razy.

7. Przy parametrach $(a, b, \sigma, \eta, \rho, \varepsilon, \lambda_1, \lambda_2)$ wybranych w kroku 6 estymujemy parametry $(\delta_{0,5Y}, \dots, \delta_{20Y})$ metodą największej wiarogodności, wykorzystując funkcję (2.24). Dla każdego terminu zapadalności wyznaczamy pierwiastek ze średniego kwadratu odchyleń pomiędzy wyestymowaną urocznioną rentownością a zaobserwowaną urocznioną rentownością dla wszystkich momentów obserwacji. Wyniki otrzymane w krokach 6 i 7 znajdują się w tabeli 1.

8. Ponownie maksymalizujemy funkcję (2.25) względem $(a, b, \sigma, \eta, \rho, \varepsilon, \lambda_1, \lambda_2)$, traktując wartości z kroków 6 i 7 jako wartości startowe w rozwiązaniu problemu optymalizacyjnego. Po wyznaczeniu $(a, b, \sigma, \eta, \rho, \varepsilon, \lambda_1, \lambda_2)$ estymujemy parametry $(\delta_{0,5Y}, \dots, \delta_{20Y})$ analogicznie jak w kroku 7; wyniki prezentujemy w tabeli 1.

Kroki 7 i 8 możemy powtórzyć, zaburzając wartości początkowe w ostatnim problemie optymalizacyjnym. Wyniki otrzymane w kroku 8 (tabela 1) były odporne na zaburzenia wartości początkowych w ostatnim problemie optymalizacyjnym. Możemy również powtórzyć kroki 7 i 8 tak, aby wartości początkowe ($\delta_{0,5Y}, \dots, \delta_{20Y}$) w kroku 7 zgadzały się z wartościami końcowymi w kroku 8. Wyniki w tabeli 1 pokazują, że nie było potrzeby kolejnych iteracji.

4.3. Estymacja dwuwymiarowego rozkładu czynników w mierze rzeczywistej i ocena dopasowania modelu

W analizie statystycznej wykorzystano Excel i pakiet R (biblioteki *fitdistrplus*, *copula*, *gofCopula*).

Zacniemy od przedstawienia analizy czynników x i y w mierze rzeczywistej oraz oceny dopasowania oszacowanego modelu stopy procentowej w mierze rzeczywistej. Mając oszacowania parametrów (\hat{a} , \hat{b} , $\hat{\sigma}$, $\hat{\eta}$, $\hat{\rho}$, $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$), otrzymane w kroku 8 procedury estymacji omówionej w poprzednim rozdziale, możemy wyznaczyć wartości nieobserwowanych czynników x i y oraz realizacje składników losowych czynników x i y zgodnie ze wzorami (2.20) i (3.1). Wartości czynników i realizacje składników losowych (reszty) w naszym modelu przedstawiliśmy na wykresach 3 i 4.

Zgodnie z (3.2)–(3.3) składniki losowe (Z_1 , Z_2) czynników x i y powinny być niezależne i pochodzić z tego samego rozkładu; w szczególności powinny mieć stałą w czasie wartość oczekiwaną i zmienność. Analizując wykres 4, możemy stwierdzić, że realizacje składników losowych czynników x i y charakteryzują się stałą w czasie wartością oczekiwaną i zmiennością. Wykres 4 wyraźnie wskazuje na stacjonarność analizowanych reszt (w szczególności nie występuje zjawisko heteroskedastyczności reszt). Na wykresie 5 obserwujemy funkcje autokorelacji realizacji składników losowych czynników x i y . Reszty cechują się niską autokorelacją. Dodatkowo wykonaliśmy test Ljunga-Boxa dla opóźnienia 1 oraz 10. Dla składnika losowego czynnika x wartości p w teście wyniosły odpowiednio 0,0484 i 0,3943. Dla składnika losowego czynnika y wartości p w teście wyniosły odpowiednio 0,0620 i 0,4068. Wyniki testów Ljunga-Boxa oraz wykres 5 wskazują, że występuje bardzo słaba autokorelacja rzędu pierwszego pomiędzy resztami. Brakuje jednak silnych wskazań do odrzucenia hipotezy o niezależności realizacji składników losowych czynników x i y (na poziomie istotności 0,05). W konsekwencji reszty przedstawione na wykresach 4a i 4b można traktować jako dwa ciągi niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie i dopasować rozkład do reszt.

Rozkłady brzegowe składników losowych czynników x i y dopasowaliśmy metodą największej wiarygodności. Ze względu na symetrię składników losowych czynników x i y , widoczną na wykresach 4a i 4b, dopasowaliśmy jedynie rozkład t-Studenta i rozkład normalny (jako szczególny przypadek rozkładu t-Studenta). Wyniki estymacji znajdują się w tabeli 2. Funkcje wiarygodności wskazują na rozkłady t-Studenta z 6 stopniami swobody. Wykonaliśmy test Kołmogorowa-Smirnowa, sprawdzający dopasowanie rozkładów t-Studenta z tabeli 2. Wartości p w teście wyniosły 0,4697 dla składnika x i 0,5531 dla składnika y . Nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o poprawności rozkładu t-Studenta (na poziomie istotności 0,05). Dodatkowo wykonaliśmy test Kołmogorowa-Smirnowa dla rozkładów normalnych z tabeli 2. Otrzymaliśmy wartości p w teście na poziomie 0,0404 dla składnika x i 0,0554 dla składnika y . Patrząc na wartości p w testach Kołmogorowa-Smirnowa i na wartości funkcji wiarygodności, widzimy, że dopasowanie rozkładów t-Studenta jest znacznie lepsze niż rozkładów normalnych. Wykresy kwantylowe dla oszacowanych rozkładów t-Studenta (wykres 6) wyraźnie wskazują na bardzo

dobre dopasowanie rozkładów t-Studenta z 6 stopniami swobody jako rozkładów brzegowych składników losowych czynników x i y . Jedynie dwie ekstremalne wartości (najmniejsza i największa reszta spośród 687 reszt) są trochę gorzej dopasowane.

Kolejny krok to analiza zależności pomiędzy realizacjami składników losowych czynników x i y z wykresu 4. Wyniki estymacji modelu w tabeli 1 wskazują na bardzo silną korelację składników losowych czynników x i y , która została oszacowana na poziomie -0,9970 przy użyciu współczynnika Pearsona w funkcji quasi-wiarogodności dla dwuwymiarowego rozkładu normalnego w mierze rzeczywistej i neutralnej względem ryzyka. W naszym modelu w mierze rzeczywistej dwuwymiarowy rozkład składników losowych czynników x i y może być dowolny. Jako rozkłady brzegowe wybraliśmy rozkłady t-Studenta z 6 stopniami swobody. Musimy jeszcze oszacować strukturę zależności pomiędzy składnikami losowymi. Standardowym podejściem w literaturze jest estymacja funkcji łączącej (kopuły) dla zmiennych losowych. Szczegóły na temat funkcji łączących i metod estymacji kopuł można znaleźć np. w książce McNeila, Embrechtsa i Freya (2005, rozdz. 5).

Zsacowaliśmy dwie funkcje łączące: kopułę t-Studenta i kopułę Gaussa (jako szczególny przypadek kopuły t-Studenta). Standardową techniką w analizie zależności jest pozbycie się rozkładów brzegowych i analiza rang obserwacji. Na wykresie 7 widzimy pary wystandaryzowanych rang (rang podzielonych przez liczbę obserwacji) dla realizacji składników losowych czynników x i y . Wykres 7 potwierdza silną ujemną zależność pomiędzy realizacjami składników losowych czynników x i y . Mimo to widać na nim kilka obserwacji cechujących się słabą dodatnią zależnością. Wykres 7 wskazuje więc na występowanie słabej dodatniej (i silnej ujemnej) zależności w ogonie, co świadczy, że kopuła t-Studenta może być lepszym modelem zależności pomiędzy składnikami losowymi czynników x i y niż kopuła Gaussa (McNeil, Embrechts, Frey 2005, rozdz. 5.1.3 i 5.3.1). Gdybyśmy mieli reszty z kopuły Gaussa z wysokim ujemnym współczynnikiem korelacji, rangi reszt na wykresie 7 leżałyby bardzo blisko linii $y = 1 - x$ i obserwowalibyśmy jedynie minimalne odchylenia w kierunku górnego prawego i dolnego lewego rogu. Kopuły Gaussa i t-Studenta oszacowaliśmy metodą największej wiarogodności z użyciem empirycznych rozkładów brzegowych (McNeil, Embrechts, Frey 2005, rozdz. 5.5.2). W tabeli 3 znajdują się wyniki oszacowań. Wartości funkcji największej wiarogodności wskazują na znacznie lepsze dopasowanie kopuły t-Studenta z 3 stopniami swobody niż kopuły Gaussa, co jest zgodne z wykresem 7. Na podstawie transformaty Rosenblatta wykonaliśmy test sprawdzający dopasowanie kopuły t-Studenta i kopuły Gaussa z tabeli 3 (patrz test $S_n^{(B)}$ w pracy: Genest, Remillard, Beaudoin 2009). Według autorów artykułu test $S_n^{(B)}$ jest najlepszy. Wartości p zostały w nim oszacowane na podstawie 10 000 symulacji *bootstrap*. Wartości p w teście wyniosły 0,9940 dla kopuły t-Studenta i 0,0260 dla kopuły Gaussa. Nie mamy więc podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o poprawności kopuły t-Studenta z 3 stopniami swobody i odrzucamy hipotezę zerową o poprawności kopuły Gaussa (na poziomie istotności 0,05).

Zsacując kopułę t-Studenta dla realizacji składników losowych czynników x i y w mierze rzeczywistej, otrzymaliśmy także wartość parametru korelacji kopuły t-Studenta. Parametr ten został oszacowany na poziomie -0,9925 (tabela 3). Zwracamy uwagę, że poza dwuwymiarowym rozkładem t-Studenta parametr korelacji kopuły t-Studenta dla dwóch zmiennych nie pokrywa się ze współczynnikiem korelacji Pearsona dla tych zmiennych (McNeil, Embrechts, Frey 2005, rozdział 5.2). W naszej sytuacji – gdy składniki losowe czynników x i y pochodzą z rozkładów t-Studenta o 6 stopniach swobody, a zależność pomiędzy składnikami opisana jest kopułą t-Studenta z 3 stopniami swobody i współczynnikiem korelacji -0,9925 – współczynnik korelacji Pearsona dla składników losowych będzie bardzo bliski -0,9925. Został on oszacowany na poziomie -0,9921 na podstawie 10 000 symulacji (nasz dwuwymiarowy mo-

del jest bliski dwuwymiarowemu rozkładowi t-Studenta). Jednocześnie, maksymalizując funkcję quasi-wiarogodności (2.25), otrzymaliśmy oszacowanie współczynnika korelacji Pearsona dla składników losowych czynników x i y dla dwuwymiarowego rozkładu normalnego w mierze rzeczywistej i neutralnej względem ryzyka na poziomie $-0,9970$ (patrz krok 8 w tabeli 1). Należy podkreślić, że wartość współczynnika korelacji kopuły t-Studenta $-0,9925$ otrzymaliśmy, maksymalizując poprawną funkcję wiarogodności dla realizacji składników losowych czynników x i y . Wartość współczynnika korelacji Pearsona $-0,9970$ otrzymaliśmy, maksymalizując funkcję quasi-wiarogodności dla rentowności, która oczywiście nie musi się pokrywać z prawdziwą funkcją wiarogodności dla rentowności. Ponieważ chcielibyśmy mieć jedną wartość współczynnika korelacji w dwuczynnikowym modelu chwilowej stopy procentowej typu G2++ w mierze rzeczywistej i neutralnej względem ryzyka, postanowiliśmy zmniejszyć (optymalną w sensie funkcji quasi-wiarogodności dla rentowności) wartość współczynnika korelacji $-0,9970$ i wybrać wartość bliską $-0,9925$. Jest ona optymalna w sensie funkcji wiarogodności do realizacji składników losowych czynników x i y w mierze rzeczywistej. Zdecydowaliśmy się wyznaczyć 99-procentowy przedział ufności dla współczynnika korelacji kopuły t-Studenta i wybrać prawą wartość tego przedziału jako ostateczne oszacowanie parametru ρ w naszym dwuczynnikowym modelu chwilowej stopy procentowej typu G2++ w mierze rzeczywistej i neutralnej względem ryzyka. Przedział ufności skonstruowaliśmy na podstawie testu ilorazu wiarogodności. Prawa wartość 99-procentowego przedziału ufności odpowiadała więc najmniejszej (w sensie wartości bezwzględnej) wartości współczynnika korelacji, która spowodowała spadek funkcji wiarogodności dla kopuły t-Studenta o maksymalnie 3,31 (jest to połowa kwantyla rzędu 99% w rozkładzie chi kwadrat z jednym stopniem swobody). Wybraliśmy wartość współczynnika korelacji na poziomie $-0,9938$. Przy nowej wartości współczynnika korelacji funkcja wiarogodności dla kopuły t-Studenta z 3 stopniami swobody spadła z 1453,46 do 1450,36 (tabela 3).

Należy podkreślić, że zmiana współczynnika korelacji ρ w oszacowanym modelu z $-0,9970$ na $-0,9938$ zmieniła wartości czynników x i y (2.20) oraz wartości realizacji składników losowych (3.1). Jednak zmiany te w naszym przypadku były niewielkie i nie wpłynęły na wyniki przedstawionych powyżej analiz (wartości p w testach nieco się zmniejszyły, ale konkluzje w testach są takie same). W szczególności wykresy 3–7 i wartości w tabelach 2–3 pozostają bez zmian.

Ostateczne parametry dwuczynnikowego modelu chwilowej stopy procentowej typu G2++ w mierze rzeczywistej są podane w tabeli 4b. Wybrany dwuwymiarowy rozkład składników losowych (z_1, z_2) czynników x i y w równaniu (3.2)–(3.3) w mierze rzeczywistej ma brzegowe rozkłady t-Studenta z parametrami z tabeli 4b oraz kopułę t-Studenta z 3 stopniami swobody i współczynnikiem korelacji z tabeli 4b. W mierze rzeczywistej współczynnik korelacji ρ z tabeli 4b pełni funkcję współczynnika korelacji kopuły t-Studenta. Wyniki analiz statystycznych przedstawionych w tym podrozdziale wyraźnie wskazują, że wybór dwuwymiarowego rozkładu normalnego jako rozkładu składników losowych czynników x i y w mierze rzeczywistej byłby błędny i powodowałyby błędne prognozowanie krzywych dochodowości. Widzimy zatem przewagę zaproponowanego modelu typu G2++ z dowolnym rozkładem czynników w mierze rzeczywistej i metody kalibracji modelu opartej na funkcji quasi-wiarogodności. Dzięki odpowiedniemu wyborowi dwuwymiarowego rozkładu dla składników losowych czynników x i y nasz oszacowany dwuczynnikowy model chwilowej stopy procentowej typu G2++ jest bardzo dobrze dopasowany w mierze rzeczywistej do zmian krzywej dochodowości zaobserwowanych na polskim rynku.

Przejdziemy teraz do analizy dopasowania oszacowanego modelu stopy procentowej w mierze neutralnej względem ryzyka. Nie możemy w niej zmieniać dynamiki procesu chwilowej stopy procentowej (2.1)–(2.4), tzn. w mierze neutralnej względem ryzyka składniki losowe czynników x i y mają dwuwy-

miarowy rozkład normalny (dwuwymiarowy ruch Browna). Dynamika procesu chwilowej stopy procentowej w mierze neutralnej względem ryzyka wpływa na ceny obligacji (2.7) i rentowności obligacji (2.8). W konsekwencji dopasowanie dwuczynnikowego modelu chwilowej stopy procentowej typu G2++ w mierze neutralnej względem ryzyka wiąże się z dopasowaniem rentowności implikowanych przez oszacowany model do rentowności zaobserwowanych na rynku. Procedura kalibracji modelu zapewnia, że rentowności obligacji jednorocznych i 10-letnich są idealnie dopasowane, ponieważ równanie (2.20) zawsze jest spełnione. Musimy zweryfikować stopień dopasowania rentowności dla pozostałych terminów zapadalności. Najprostszą miarą dopasowania jest błąd średniokwadratowy dla urocznionych rentowności, czyli pierwiastek ze średniego kwadratu odchyleń urocznionej rentowności implikowanej przez oszacowany model od urocznionej rentowności zaobserwowanej na rynku dla wszystkich dat obserwacji, liczony dla pojedynczych terminów zapadalności lub dla wszystkich terminów zapadalności łącznie.

Na pierwszym etapie kalibracji wyznaczyliśmy parametry modelu stopy procentowej w mierze rzeczywistej i neutralnej względem ryzyka, maksymalizując funkcję quasi-wiarogodności (patrz krok 8 w tabeli 1). Przy optymalnych parametrach z kroku 8 w tabeli 1 błąd średniokwadratowy dopasowania urocznionych rentowności dla wszystkich terminów zapadalności wyniósł 0,0940 pkt proc. Analizując rozkład składników losowych czynników x i y w mierze rzeczywistej, podjęliśmy decyzję o zmianie współczynnika korelacji. Zmiana ta dotyczyła także parametru korelacji w mierze neutralnej względem ryzyka. Ostateczne parametry dwuczynnikowego modelu chwilowej stopy procentowej typu G2++ w mierze neutralnej względem ryzyka są podane w tabeli 4a. Zwracamy uwagę, że w mierze neutralnej względem ryzyka współczynnik korelacji ρ z tabeli 4a pełni funkcję współczynnika korelacji Pearsona dla dwuwymiarowego rozkładu normalnego dla składników losowych czynników x i y . Wybór nieoptymalnej wartości współczynnika korelacji powoduje spadek wartości funkcji quasi-wiarogodności (2.25). Z praktycznego punktu widzenia wiąże się to z gorszym dopasowaniem rentowności obligacji, które w procedurze optymalizacyjnej były traktowane jako obserwowane z błędem (rentowności obligacji jednorocznych i 10-letnich nadal będą idealnie dopasowane). Przy ostatecznych oszacowaniach parametrów z tabeli 4a błąd średniokwadratowy dopasowania urocznionych rentowności dla wszystkich terminów zapadalności wyniósł 0,0945 pkt proc. Widzimy, że zmiana współczynnika korelacji, związana z analizą danych w mierze rzeczywistej, w niewielkim stopniu pogorszyła stopień dopasowania modelu w mierze neutralnej względem ryzyka. Błędy średniokwadratowe dopasowań urocznionych rentowności dla poszczególnych terminów zapadalności znajdują się w tabeli 4a i dane są przez oszacowania parametrów $\delta_{0,5Y}, \dots, \delta_{20Y}$. Z największym błędem, rzędu 0,15 pkt proc., została dopasowana uroczniona rentowność obligacji 20-letnich. Błędy dopasowań urocznionych rentowności dla pozostałych terminów zapadalności były poniżej 0,1 pkt proc. Patrząc na błędy średniokwadratowe dopasowania urocznionych rentowności, możemy stwierdzić, że oszacowany przez nas dwuczynnikowy model chwilowej stopy procentowej typu G2++ jest dobrze dopasowany w mierze neutralnej względem ryzyka do rentowności zaobserwowanych na polskim rynku dla terminów zapadalności powyżej 6 miesięcy i poniżej 15 lat. Potwierdzenia tego wniosku dostarcza dokładne porównanie krzywych dochodowości implikowanych przez oszacowany model z zaobserwowanymi rentownościami dla wszystkich terminów zapadalności i kilku wybranych dat obserwacji (wykres 8). Poprawę dopasowania modelu w mierze neutralnej względem ryzyka można uzyskać tylko przez wprowadzenie trzeciego czynnika do modelu chwilowej stopy procentowej.

Wykonaliśmy jeszcze dwie analizy potwierdzające, że nasz oszacowany model stopy procentowej jest poprawny. Przy zadanych oszacowaniach parametrów z tabeli 4a możemy wyznaczyć chwilową stopę procentową zgodnie ze wzorem (2.11). Wykres 9a przedstawia oszacowaną trajektorię chwilowej stopy procentowej. Powszechnie uważa się, że jej dobrym przybliżeniem jest stopa *overnight*. Na wykresie 9b porównujemy chwilową stopę procentową implikowaną przez nasz oszacowany model ze stopą WIBID *overnight*. Dane na temat stopy WIBID *overnight* zostały pobrane ze strony www.money.pl. Ponieważ stopy *overnight* podlegają dużym wahaniom, wykres 9b jest trudny do interpretacji. Możemy jednak stwierdzić, że wynik naszej kalibracji jest rozsądny. Co prawda obserwujemy okresy, w których chwilowa stopa procentowa implikowana przez oszacowany model jest wyższa lub niższa niż stopa WIBID *overnight*, jednak kierunki zmian tych stóp są zgodne. Patrząc na wykresy 8a–8f, możemy zaobserwować, że nasz model niedoszacowuje rentowności obligacji 6-miesięcznych, a także niedoszacowuje rentowności obligacji 3-miesięcznych, które pokrywały się z rentownościami obligacji 6-miesięcznych w analizowanym okresie. Ponieważ chwilowa stopa procentowa spełnia równanie (2.9), spodziewamy się, że implikowana przez oszacowany model chwilowa stopa procentowa może być zaniżona w stosunku do rzeczywistej chwilowej stopy procentowej (stopy WIBID *overnight*).

Przeanalizowaliśmy również premie za ryzyko dla obligacji skarbowych. Ponieważ w naszym dwuczynnikowym modelu chwilowej stopy procentowej typu G2++ rozkład czynników w mierze rzeczywistej nie jest dwuwymiarowym rozkładem normalnym, zależność (2.18) określająca premie za ryzyko dla obligacji o danym terminie zapadalności nie jest spełniona. W naszym modelu musimy więc szacować premie za ryzyko dla obligacji bezpośrednio ze wzoru (2.17). Wyzaczyliśmy premie za ryzyko dla obligacji skarbowych na 22 marca 2017 r., tzn. na moment $t = 2,7115$. Cenę obligacji o terminie zapadalności τ we wzorze (2.17) wyznaczyliśmy zgodnie ze wzorem (2.7); szczegóły można znaleźć w przykładzie 2 w kolejnym rozdziale. Metodą Monte Carlo oszacowaliśmy oczekiwaną wartość czynnika dyskontującego w mierze rzeczywistej za okres o długości τ , tzn.

$$E \left[e^{-\int_t^{t+\tau} r(v) dv} \mid x(t), y(t) \right]$$

W tym celu generowaliśmy trajektorie czynników x i y zgodnie z równaniami rekurencyjnymi (3.2)–(3.3) i wyznaczyliśmy chwilową stopę procentową zgodnie ze wzorem (2.11); szczegóły można znaleźć w przykładzie 1 w kolejnym rozdziale. Estymację metodą Monte Carlo przeprowadziliśmy, wykonując 10 000 powtórzeń. Wyniki analiz, tzn. urocznione premie za ryzyko przy kapitalizacji ciągłej (2.19), są podane w tabeli 5. Wszystkie urocznione premie za ryzyko są dodatnie i rosną wraz z terminem zapadalności obligacji, co jest zgodne z oczekiwaniami inwestorów. Jedynie uroczniona premia za ryzyko dla obligacji 20-letniej jest niższa niż uroczniona premia za ryzyko dla obligacji 15-letniej. Zgodnie z wcześniejszymi obserwacjami nasz oszacowany dwuczynnikowy model chwilowej stopy procentowej typu G2++ nie opisuje dobrze rentowności obligacji 20-letnich.

Warto sprawdzić, czy oszacowane premie za ryzyko dla obligacji skarbowych z tabeli 5 są racjonalne. Możemy starać się oszacować historyczne premie za ryzyko, tzn. dla każdego momentu t możemy wyznaczyć nadwyżkę stopy zwrotu z inwestycji w obligację skarbową o terminie zapadalności τ ponad stopę zwrotu z inwestycji środków na wolnym od ryzyka rachunku oszczędnościowym w ciągu τ lat. W tym celu przybliżyliśmy historyczną wolną od ryzyka stopę zwrotu z rachunku oszczędnościowego $e^{-\int_t^{t+\tau} r(v) dv}$

za pomocą skumulowanego oprocentowania przy stopie WIBID *overnight* w analizowanym przedziale czasu $[t, t+\tau]$. Ponieważ rozważaliśmy dane z okresu krótszego niż 3 lata (od 1 lipca 2014 do 22 marca 2017 r.), mogliśmy oszacować historyczne premie za ryzyko tylko dla terminów zapadalności krótszych niż trzy lata. Na wykresie 10 podano oszacowania historycznych premii za ryzyko dla obligacji jednorocznych i 2-letnich. Średnia premia za ryzyko dla obligacji jednorocznej w badanym okresie wyniosła 0,34 pkt proc, a średnia premia za ryzyko dla obligacji 2-letniej w badanym okresie wyniosła 0,51 pkt proc. Wyniki w tabeli 5 dla obligacji jednorocznych i 2-letnich zgadzają się z oszacowaniami historycznych premii za ryzyko dla tych obligacji. Potwierdza to poprawność naszego oszacowanego dwuczynnikowego modelu chwilowej stopy procentowej typu G2++. Uważamy także, że tabela 5 zawiera wartościowe informacje na temat premii za ryzyko dla obligacji skarbowych z polskiego rynku.

Podsumowując, udało nam się dopasować dwuczynnikowy model chwilowej stopy procentowej typu G2++ z dowolnym rozkładem czynników w mierze rzeczywistej, który bardzo dobrze opisuje zmiany rentowności obligacji jednorocznych i 10-letnich w czasie i w zadowalającym stopniu opisuje strukturę terminową stóp procentowych dla terminów zapadalności dłuższych niż 6 miesięcy i krótszych niż 15 lat.

5. Przykłady zastosowania oszacowanego dwuczynnikowego modelu chwilowej stopy procentowej typu G2++ z dowolnym rozkładem czynników w mierze rzeczywistej

Poniżej omówimy prognozę krzywej dochodowości w perspektywie jednego roku, wycenę portfela obligacji (wycenę gwarantowanych przepływów finansowych) i wyznaczenie wymogu kapitałowego z tytułu ryzyka stopy procentowej dla portfela obligacji.

Przykład 1. Inwestorzy są zainteresowani prognozą krzywej dochodowości w ustalonym horyzoncie czasu, ponieważ prognoza krzywej dochodowości dostarczy m.in. informacji na temat przyszłych stóp, po których inwestorzy będą mogli odnowić inwestycje. Oszacowany model typu G2++ wykorzystaliśmy do prognozowania krzywej dochodowości rentowności polskich obligacji skarbowych w perspektywie jednego roku oraz do wyznaczenia przedziałów ufności dla krzywej dochodowości. Oczywiście możemy prognozować krzywą dochodowości w innym horyzoncie czasowym.

W celu wyznaczenia prognozy krzywej dochodowości w perspektywie roku i przedziałów ufności dla krzywej dochodowości w naszym modelu stopy procentowej postępujemy w następujący sposób:

1. Przy ustalonym kroku dyskretyzacji Δ rocznego okresu, generujemy realizacje $(Z_1(t), Z_2(t))_{t=\Delta, 2\Delta, \dots, 1}$ niezależnych par składników losowych czynników x i y zgodnie z oszacowanym rozkładem czynników w mierze rzeczywistej. W naszym badaniu $\Delta = 1/253$, wygenerowaliśmy więc 253 niezależne pary o brzegowych rozkładach t-Studenta z parametrami z tabeli 4b o zależności opisanej kopułą t-Studenta z 3 stopniami swobody i współczynnikiem korelacji z tabeli 4b. Sposób generowania zmiennych losowych z kopuły t-Studenta można znaleźć np. w książce McNeila, Embrechtsa i Freya (2005, rozdz. 5.1.3).

2. Mając pary $(Z_1(t), Z_2(t))_{t=\Delta, 2\Delta, \dots, 1}$, generujemy realizacje czynników x i y w perspektywie jednego roku zgodnie z równaniami rekurencyjnymi (3.2)–(3.3), zaczynając od ostatnich dostępnych wartości czynników x i y (wartości x i y na ostatni dzień w szeregu czasowym). Ostatnie dostępne wartości czynników x i y przypadały na 22 marca 2017 r. (wykres 3) i zostały oszacowane na poziomie $x(2,7115) = 0,5234\%$, $y(2,7115) = -1,700\%$.

3. Znając wartości czynników x i y w perspektywie jednego roku, wyznaczamy ceny obligacji i rentowności obligacji dla wszystkich terminów zapadalności zgodnie ze wzorami (2.7)–(2.8) przy zadanych wartościach x i y na moment t o rok późniejszy niż ostatnia data w szeregu czasowym. W naszym przypadku, mając wartości $x(3,7115)$, $y(3,7115)$ na 22 marca 2018 r., otrzymane w kroku 2, wyznaczyliśmy ceny obligacji i rentowności obligacji dla wszystkich terminów zapadalności zgodnie ze wzorami (2.7)–(2.8) na moment $t = 3,7115$. Urocznione wartości rentowności tworzą krzywą dochodowości w perspektywie jednego roku.

4. Kroki 1–3 powtarzamy. W badaniu kroki 1–3 zostały powtórzone 10 000 razy. Rozpatrywaliśmy terminy zapadalności o miesięcznych odstępach.

5. W próbie wygenerowanych urocznionych rentowności, otrzymanych w kroku 4, wyznaczamy percentyle interesującego nas rzędu oddzielnie dla każdego terminu zapadalności. W badaniu wyznaczyliśmy percentyle rzędu 0,5%, 2,5%, 97,5% i 99,5%.

6. Percentyle otrzymane w kroku 5 dla kolejnych terminów zapadalności tworzą tzw. punktowy przedział ufności dla krzywej dochodowości w perspektywie roku. W badaniu wyznaczyliśmy punktowe 99- i 95-procentowe przedziały ufności dla krzywej dochodowości w perspektywie roku.

Wykres 11 przedstawia oszacowane punktowe 95- i 99-procentowe przedziały ufności dla krzywej dochodowości w perspektywie jednego roku (na 22 marca 2018 r.) dla polskiego rynku. Warto odnotować, że krzywa składająca się z percentyli rzędu 0,5% dla rentowności dla poszczególnych terminów zapadalności jest nad zerem. Oznacza to, że dla każdego terminu zapadalności uroczniona rentowność obligacji skarbowej w perspektywie jednego roku będzie dodatnia z prawdopodobieństwem 99,5%. Wśród 10 000 wygenerowanych przez nas krzywych dochodowości znalazły się jednak dwie krzywe z ujemnymi rentownościami. Dwie wygenerowane krzywe dochodowości implikowały ujemne rentowności dla terminów zapadalności poniżej 3 lat, a jedna wygenerowana krzywa dochodowości implikowała ujemne rentowności dla terminów zapadalności poniżej 6 lat. Możemy stwierdzić, że ujemne stopy procentowe w perspektywie jednego roku nie grożą polskiej gospodarce. Zgodnie z oszacowanym przez nas dwuczynnikowym modelem chwilowej stopy procentowej typu G2++ polska gospodarka jest narażona na ujemne rentowności obligacji skarbowych w perspektywie jednego roku z prawdopodobieństwem zaledwie 0,02%.

Należy podkreślić, że generowana zgodnie z naszym modelem krzywa dochodowości w perspektywie jednego roku nie powstaje w wyniku równoległego przesunięcia bazowej krzywej dochodowości. Nasz model pozwala na wygenerowanie różnych kształtów krzywej dochodowości, co oczywiście należy uznać za jego zaletę. Na wykresie 12 widzimy kilka wybranych krzywych dochodowości wygenerowanych w naszym badaniu symulacyjnym prognozy krzywej dochodowości w perspektywie roku. Widzimy również krzywą dochodowości z ujemnymi rentownościami.

Przykład 2. Przykład 1 pokazuje bardzo ważne zastosowanie modelu stopy procentowej w mierze rzeczywistej. Omówimy teraz przykład wykorzystania modelu w mierze neutralnej względem ryzyka. Oszacowany dwuczynnikowy model chwilowej stopy procentowej typu G2++ możemy wykorzystać do wyceny rynkowej przepływów finansowych (w ramach ograniczeń, o których wspomnieliśmy w rozdziale 3). Wybraliśmy następujące obligacje stałokuponowe:

- seria DS0726, oprocentowanie = 2,5%, data wykupu – 25 lipca 2026 r.,
- seria DS1019, oprocentowanie = 5,5%, data wykupu – 25 października 2019 r.,
- seria DS1023, oprocentowanie = 4%, data wykupu – 25 października 2023 r.,
- seria WS0429, oprocentowanie = 5,75%, data wykupu – 25 kwietnia 2029 r.

Obligacje wypłacają stałe kupony w rocznice wykupu obligacji. Ceny nominalne obligacji wynoszą 1000 zł. Z każdą z wymienionych powyżej obligacji wiążą się następujące przepływy finansowe: a) kupony wyznaczone od ceny nominalnej zgodnie z zadaniem stałym oprocentowaniem wypłacane w rocznice wykupu, b) wartość nominalna zwracana w dniu wykupu. W celu wyznaczenia wartości rynkowej przepływów finansowych i cen obligacji na 22 marca 2017 r. wykorzystaliśmy wzór (2.7). Oczywiście opisuje on cenę obligacji zerokuponowej o jednostkowej wartości nominalnej i terminie zapadalności τ lub, równoważnie, wartość rynkową jednostkowego przepływu finansowego następującego w terminie τ lat. Wybraliśmy $x(2,7115) = 0,5234\%$, $y(2,7115) = -1,1700\%$, co odpowiadało wartościom czynników na dzień wyceny ($t = 2,7115$). Jako termin zapadalności τ we wzorze (2.7) przyjmowaliśmy wartości odpowiadające terminom do płatności kuponu lub wartości nominalnej, w zależności od tego, jaki przepływ wycenialiśmy. Ceny obligacji implikowane przez oszacowany dwuczynnikowy model chwilowej stopy procentowej typu G2++ znajdują się w tabeli 6.

Ponieważ ceny analizowanych obligacji były notowane na rynku, porównaliśmy ceny implikowane przez nasz model z cenami rynkowymi (z 22 marca 2017 r.), co można traktować jako dodatkowy test sprawdzający dopasowanie modelu w mierze neutralnej względem ryzyka. Błędy względne dopasowań cen obligacji były na niskim poziomie (tabela 6), co potwierdziło dobre dopasowanie oszacowanego modelu w mierze neutralnej względem ryzyka dla terminów zapadalności krótszych niż 15 lat. Oczywiście błędy dopasowań cen obligacji w tabeli 6 są pochodnymi błędów dopasowań rentowności, które obserwujemy na wykresie 8f (krzywe dochodowości implikowane przez nasz model i rentowności zaobserwowane 22 marca 2017 r.).

W przykładzie wyceniliśmy przepływy finansowe związane z obligacjami stałokuponowymi, które są kwotowane na rynku. Analogicznie możemy wycenić każde inne gwarantowane przepływy związane ze zobowiązaniami, które nie są przedmiotem obrotu na rynku finansowym. Klasycznym przykładem byłaby tu wycena rynkowa gwarantowanych zobowiązań związanych z ubezpieczeniami na życie (por. Møller, Steffensen 2007, rozdz. 3).

Przykład 3. Mając wygenerowane krzywe dochodowości w perspektywie jednego roku (przykład 1) i mechanizm wyceny gwarantowanych przepływów finansowych (przykład 2), możemy wyznaczyć prognozę zmian wartości rynkowej przepływów w wyniku rocznych zmian struktury terminowej stóp procentowych. W przypadku portfela obligacji stałokuponowych z poprzedniego przykładu tego rodzaju przeliczenie pozwoli oszacować maksymalną, przy zadanym poziomie ufności, utratę wartości portfela obligacji w horyzoncie jednego roku i wyznaczyć wymóg kapitałowy z tytułu ryzyka stopy procentowej dla portfela obligacji w horyzoncie jednego roku. Jak wspomnieliśmy we Wstępie, banki i firmy ubezpieczeniowe są zobligowane przez prawo do obliczania wymogów kapitałowych.

Ceny obligacji stałokuponowych z przykładu 2 zostały przeliczone przy założeniu, iż struktura terminowa stóp procentowych zmienia się zgodnie z wygenerowanymi krzywymi dochodowości w perspektywie jednego roku oraz że czas do wykupu wartości nominalnej i płatności kuponów obligacji się nie zmieni. Zgodnie z praktyką wyznaczenie wymogu kapitałowego z tytułu ryzyka stopy procentowej dla portfela obligacji powinno się wiązać z wyznaczeniem zmiany wartości portfela obligacji wyłącznie w wyniku wahań stóp procentowych, bez zmiany czasu trwania (duracji) obligacji. Ceny obligacji stałokuponowych w scenariuszach zmian struktury terminowej stóp procentowych wyznaczyliśmy tak jak w przykładzie 2, wykorzystując wzór (2.7). Tym razem podstawiliśmy jednak $t = 3,7115$ i wartości czynników x i y wygenerowane w kroku 3 z przykładu 1. Ponieważ w przykładzie 1 wygenerowaliśmy 10 000 realizacji czynników x i y oraz krzywych dochodowości na moment $t = 3,7115$, dostaliśmy 10 000

realizacji cen obligacji stałokuponowych w różnych scenariuszach struktury terminowej stóp procentowych. Tabela 7 zawiera odpowiednie percentyle dla wygenerowanych cen obligacji i zmian cen obligacji w ciągu roku.

Przyjmijmy, że firma liczy wymóg kapitałowy z tytułu ryzyka stopy procentowej dla portfela obligacji jako kwantyl rzędu 0,5% zmiany wartości portfela (utrata wartości portfela). Wymóg kapitałowy zabezpieczający portfel obligacji przed ryzykiem stopy procentowej wyniósłby zatem 590,72 zł, co stanowiłoby około 13,5% bieżącej wartości portfela obligacji.

6. Zakończenie

W pracy jako model struktury terminowej stóp procentowych zaproponowaliśmy dwuczynnikowy model chwilowej stopy procentowej typu G2++, w którym rozkład czynników w mierze neutralnej względem ryzyka jest dwuwymiarowym rozkładem normalnym, a rozkład czynników w mierze rzeczywistej jest dowolny (zarówno rozkłady brzegowe czynników, jak i struktura zależności są dowolne). Na podstawie danych o rentowności obligacji skarbowych z polskiego rynku oszacowaliśmy nasz model stopy procentowej typu G2++, stosując metodę quasi-wiarogodności. Model bardzo dobrze wyjaśnił zmiany rentowności obligacji jednorocznych i 10-letnich w czasie oraz w zadowalającym stopniu opisał strukturę terminową stóp procentowych dla terminów zapadalności dłuższych niż 6 miesięcy i krótszych niż 15 lat. Jako przykład zastosowania modelu wyznaczyliśmy prognozę krzywej dochodowości rentowności polskich obligacji skarbowych w perspektywie jednego roku, a na podstawie prognoz krzywej dochodowości wyznaczyliśmy wartość portfela obligacji i wymóg kapitałowy z tytułu ryzyka stopy procentowej dla portfela obligacji.

Bibliografia

- Ait-Sahalia Y., Kimmel R. (2010), Estimating affine multifactor term structure models using closed-form likelihood expansions, *Journal of Financial Economics*, 98, 113–144.
- Andersen L., Piterbarg V. (2010), *Interest Rate Modeling. Volume 2: Term Structure Models*, Atlantic Financial Press.
- Brigo D., Mercurio F. (2006), *Interest Rate Models – Theory And Practice. With smile, Inflation and Credit*, Springer.
- Cassola N., Luis J.B. (2001), *A two-factor model of the German term structure of interest rates*, Working Paper, 46, European Central Bank.
- Chen R., Scott L. (1993), Maximum likelihood estimation for a multifactor equilibrium model of the term structure of interest rates, *Journal of Fixed Income*, December, 14–31.
- Dai Q., Singleton K.J. (2000), Specification analysis of affine term structure models, *Journal of Finance*, 55, 1943–1978.
- Duffee C.R. (2002), Term premia and interest rate forecasts in affine models, *Journal of Finance*, 57, 405–443.

- Duffi D., Filipovic D., Schachermayer W. (2003), Affine processes and applications in finance, *Annals of Applied Probability*, 13, 984–1053.
- Fisher M., Gilles C. (1996), *Estimating exponential-affine models of the term structure*. Technical report, Federal Reserve Bank of Atlanta, niepublikowany raport.
- Genest C., Remillard B., Beaudoin D. (2009), Goodness-of-fit for copulas: a review and a power study, *Insurance: Mathematics and Economics*, 44, 199–213.
- Hainaut D., MacGilchrist R. (2010), An interest rate tree driven by a Lévy process, *The Journal of Derivatives*, 18, 33–45.
- Hibbert J., Mowbray P., Turnbull C. (2001), *A stochastic asset model and calibration long-term financial planning purposes*, niepublikowany raport.
- Jakubowski J., Palczewski A., Rutkowski A., Stettner Ł. (2003), *Matematyka finansowa*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne.
- Jakubowski J., Sztencel R. (2001), *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, SCRIPT.
- Kliber P. (2009), Estymacja struktury terminowej stóp procentowych w Polsce, *Bank i Kredyt*, 40, 109–126.
- Korn R., Korn E., Kroisandt G. (2010), *Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance*, CRC Press.
- Marciniak M. (2006), Yield curve estimation at the National Bank of Poland, *Bank i Kredyt*, 10, 52–74.
- McNeil A., Frey R., Embrechts P. (2005), *Quantitative Risk Management*, Princeton University Press.
- Olsza P. (2012), Mierzenie ryzyka stóp procentowych: przypadek rynku międzybankowego w Polsce, *Przegląd Statystyczny*, 4, 434–454.
- Stamirowski M. (2003), Jednoczynnikowe modele Vasicka oraz CIR – analiza empiryczna na podstawie danych z polskiego rynku obligacji skarbowych, *Bank i Kredyt*, 34, 35–46.
- Waszkowski A. (2012), Estymacja krzywej dochodowości stop procentowych dla Polski, *Metody Ilościowe w Badaniach Ekonomicznych*, XIII/3, 253–261.
- Weron A., Weron R. (1999), *Inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne.
- White H. (1982), Maximum-likelihood estimation of misspecified models, *Econometrica*, 50, 1–25.

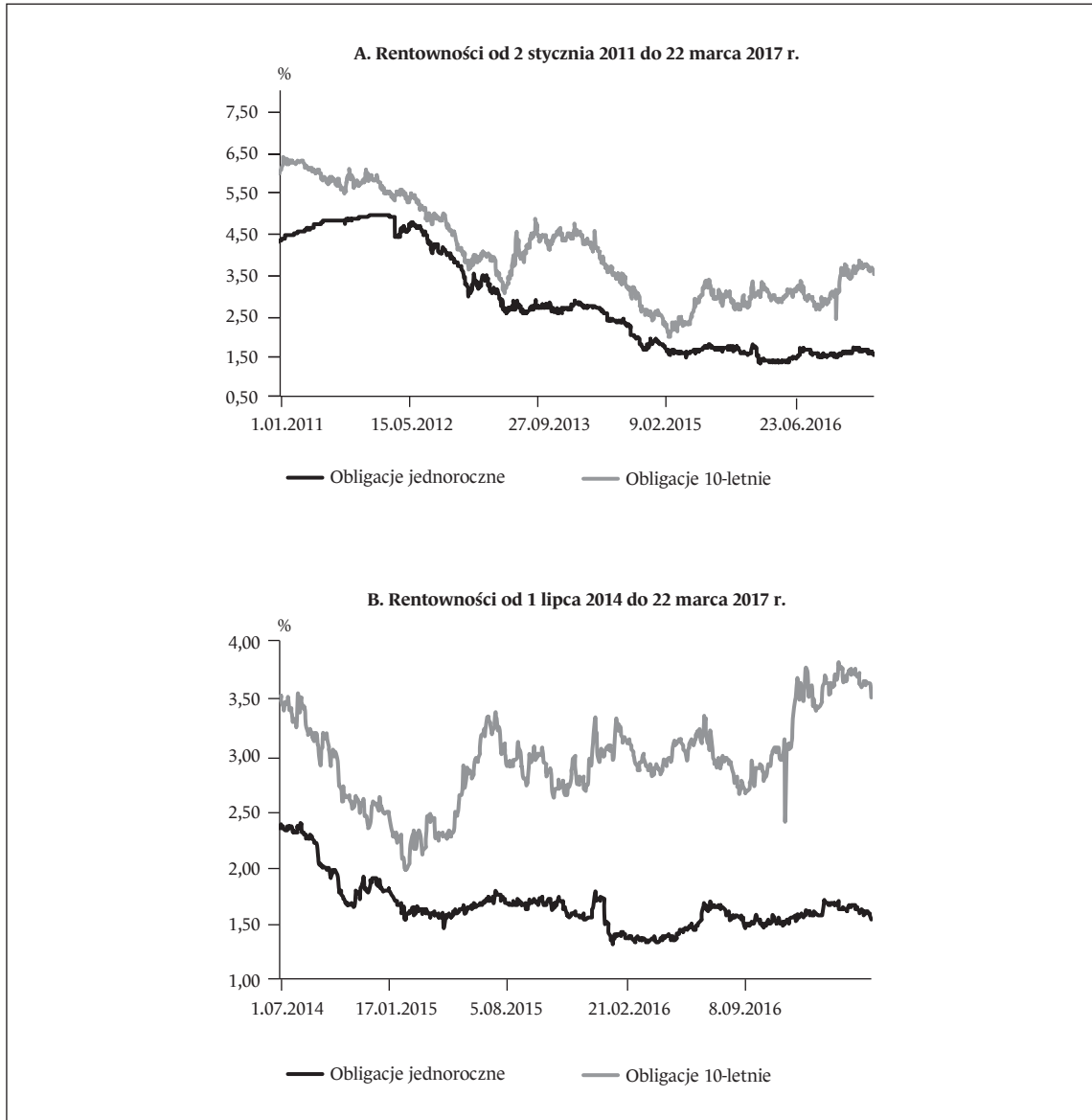
Podziękowania

Autorzy pragną podziękować dwóm recenzentom, których bardzo cenne uwagi przyczyniły się do istotnej zmiany pierwszej wersji artykułu i zachęciły do poszerzenia zakresu badania.

Aneks

Wykres 1

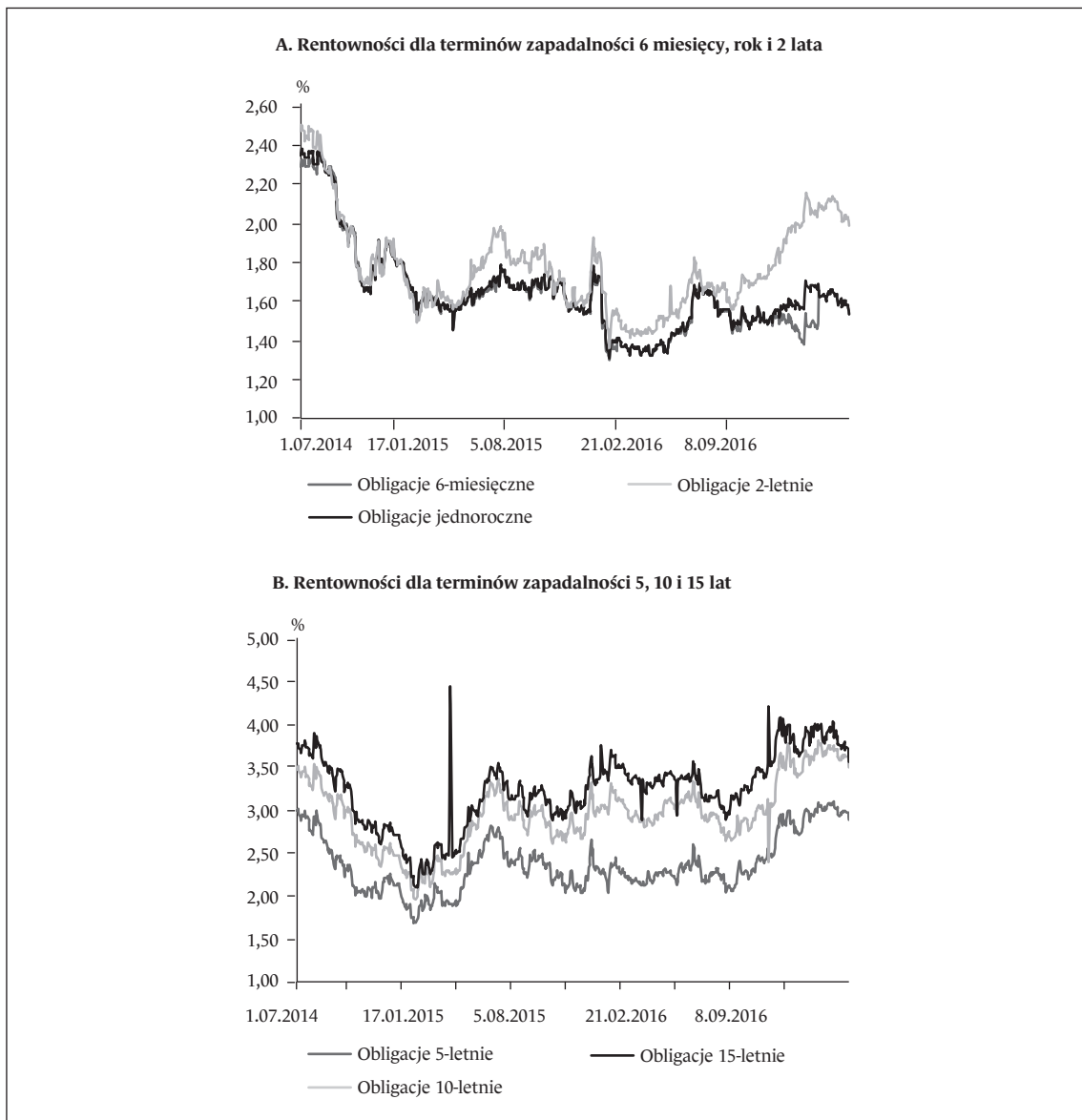
Rentowności (w stosunku rocznym przy kapitalizacji ciągłej) polskich obligacji skarbowych jednorocznych i 10-letnich



Źródło: I177 CMPL Index Bloomberg.

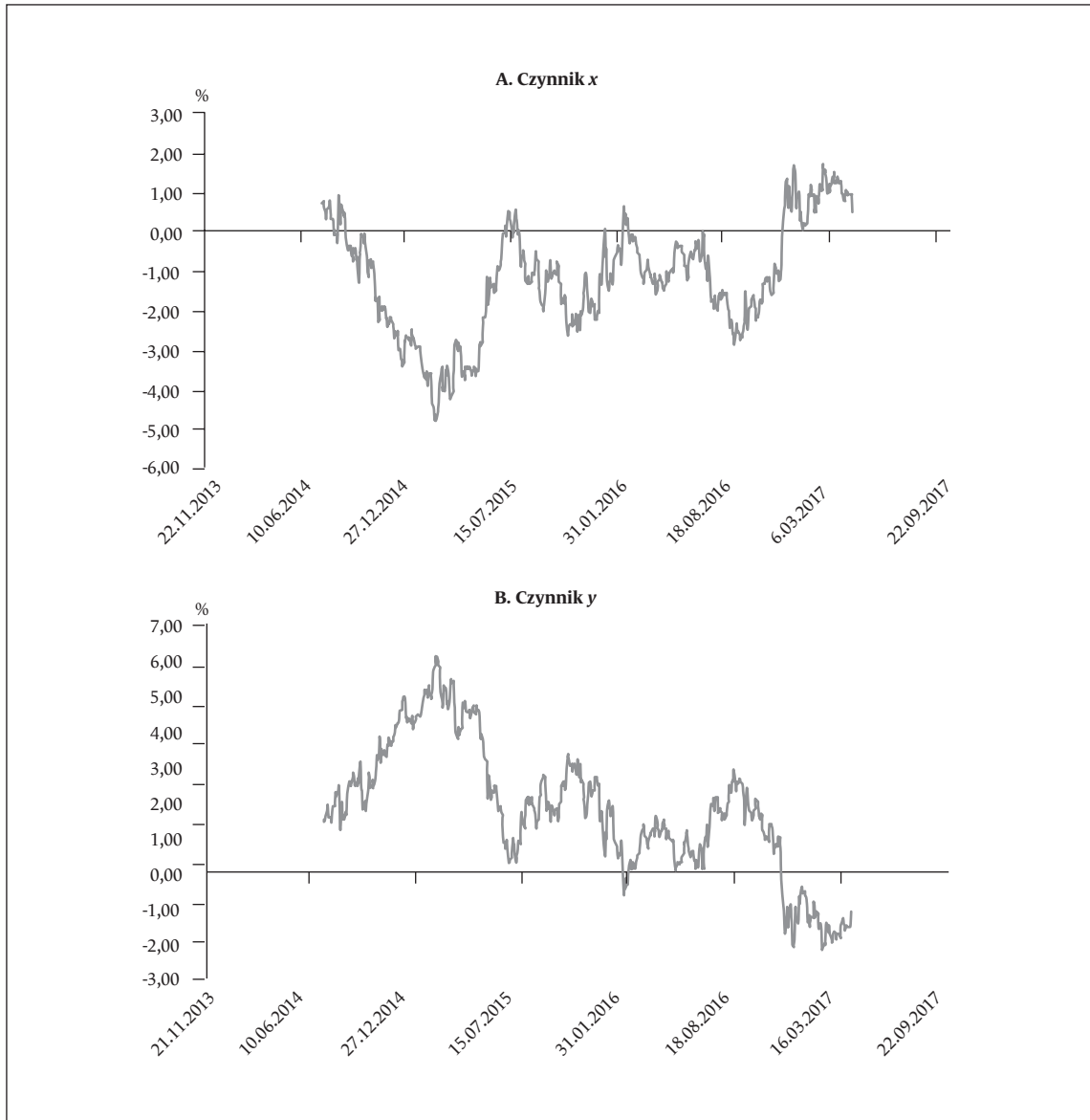
Wykres 2

Rentowności (w stosunku rocznym przy kapitalizacji ciągłej) polskich obligacji skarbowych od 1 lipca 2014 do 22 marca 2017 r.



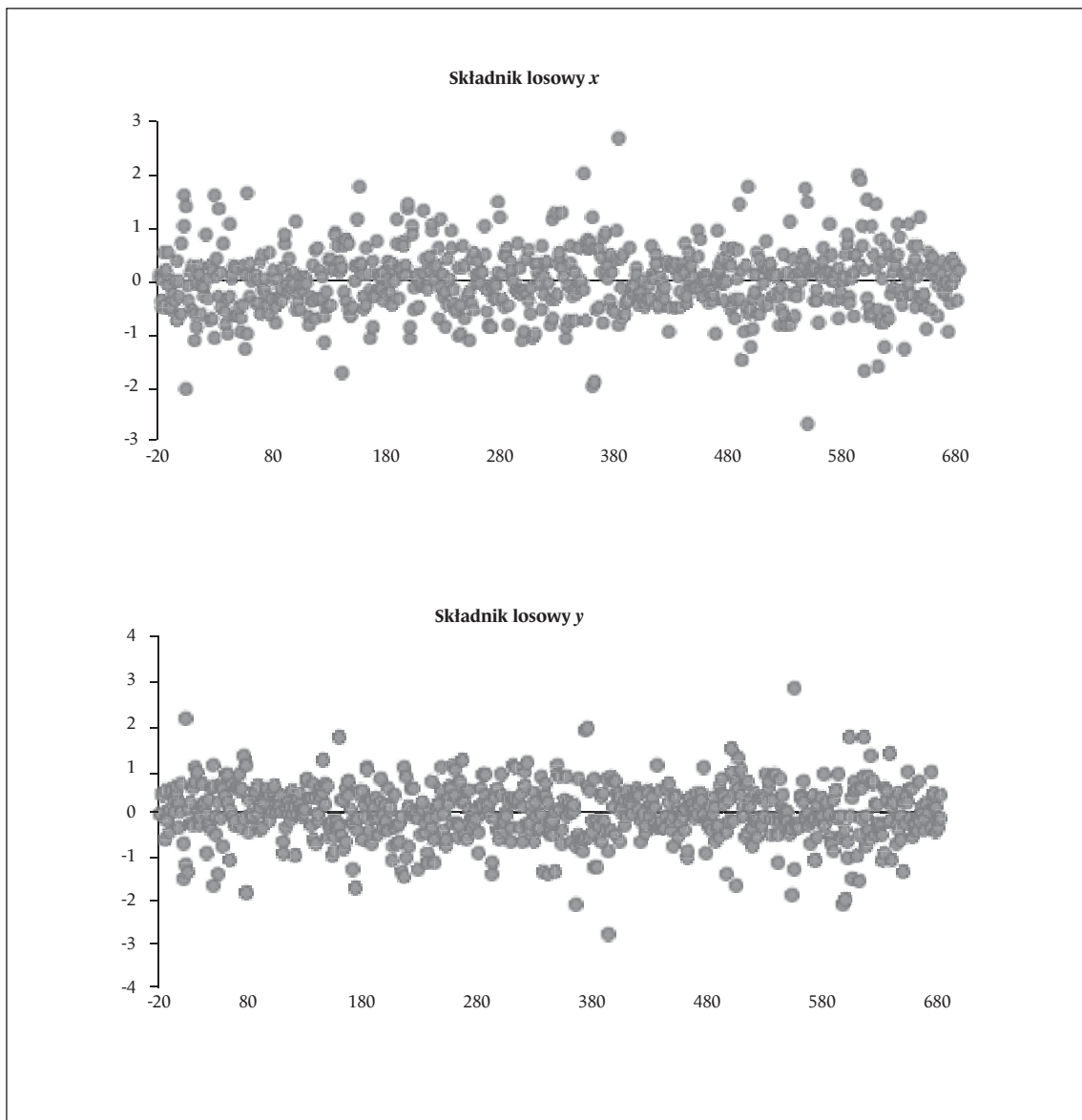
Źródło: I177 CMPL Index Bloomberg.

Wykres 3

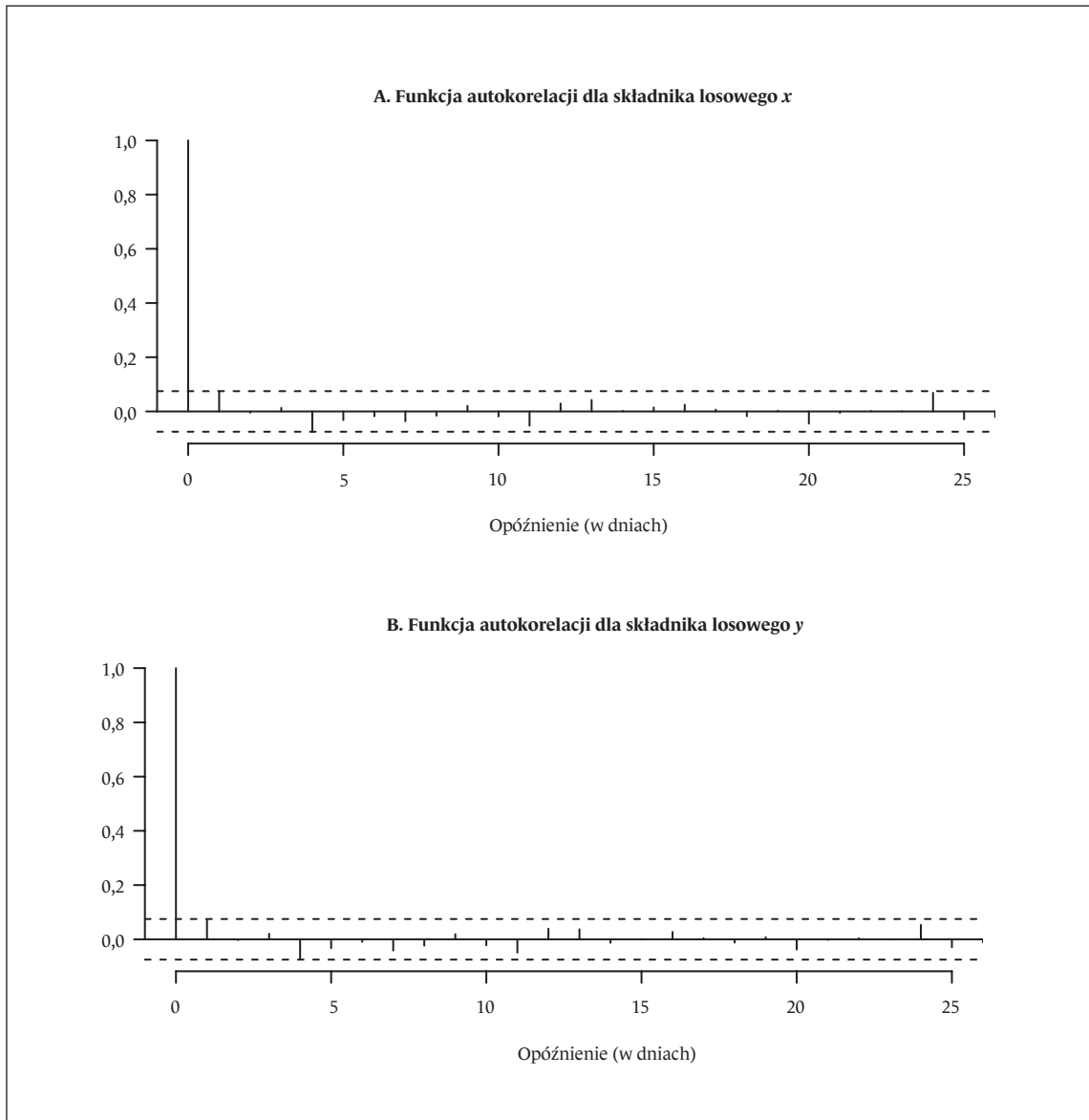
Wartości czynników x i y przy oszacowaniach parametrów modelu z kroku 8 z tabeli 1

Wykres 4

Realizacje składników losowych czynników x i y (reszty) przy oszacowaniach parametrów modelu z kroku 8 z tabeli 1

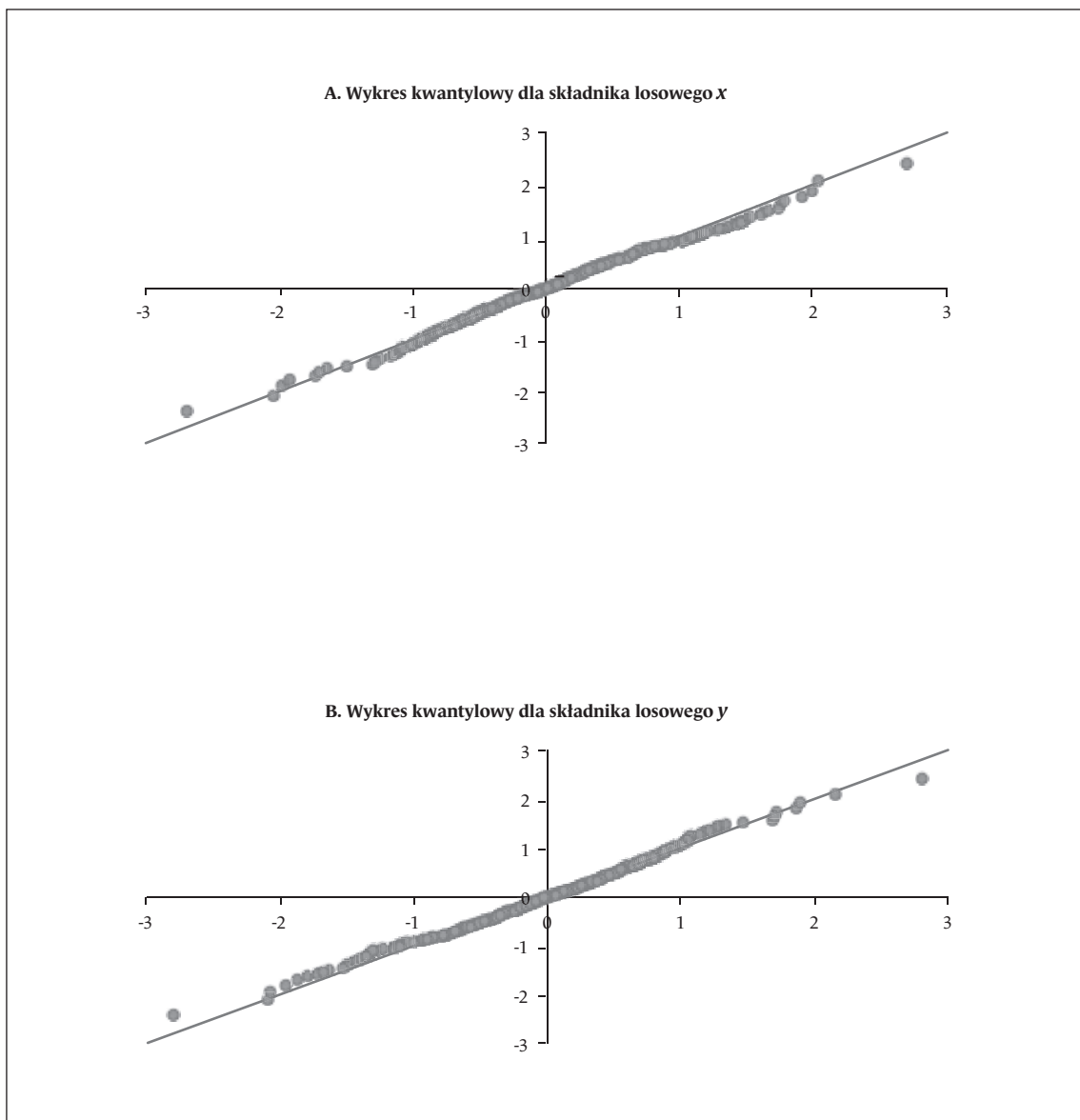


Wykres 5

Funkcje autokorelacji dla realizacji składników losowych czynników x i y 

Uwaga: realizacje składników losowych z wykresu 4.

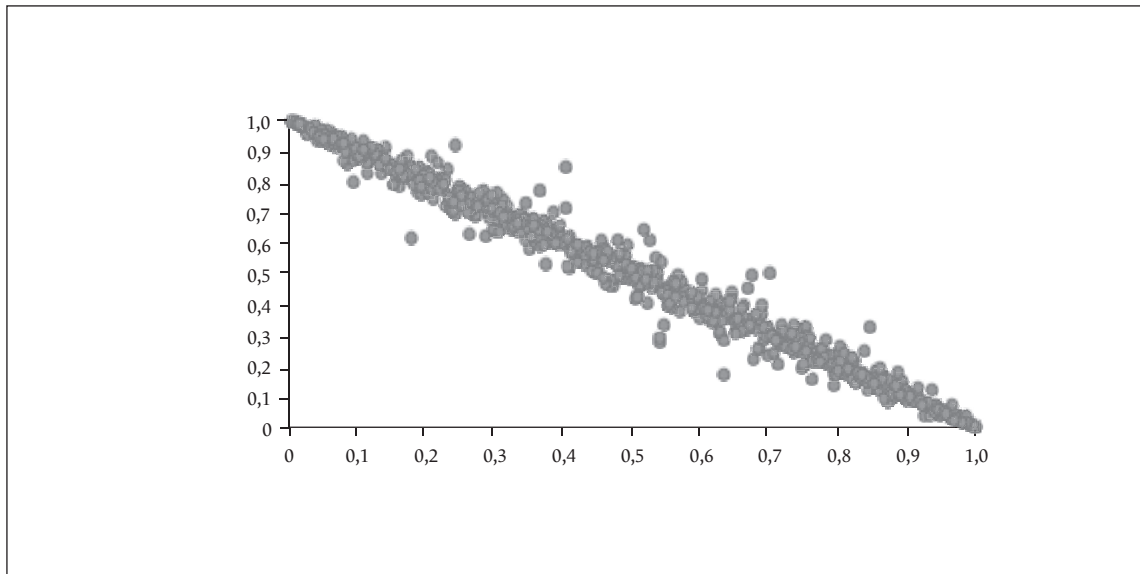
Wykres 6

Wykresy kwantylowe dla rozkładów t-Studenta z tabeli 2 dla składników losowych czynników x i y 

Uwaga: realizacje składników losowych z wykresu 4.

Wykres 7

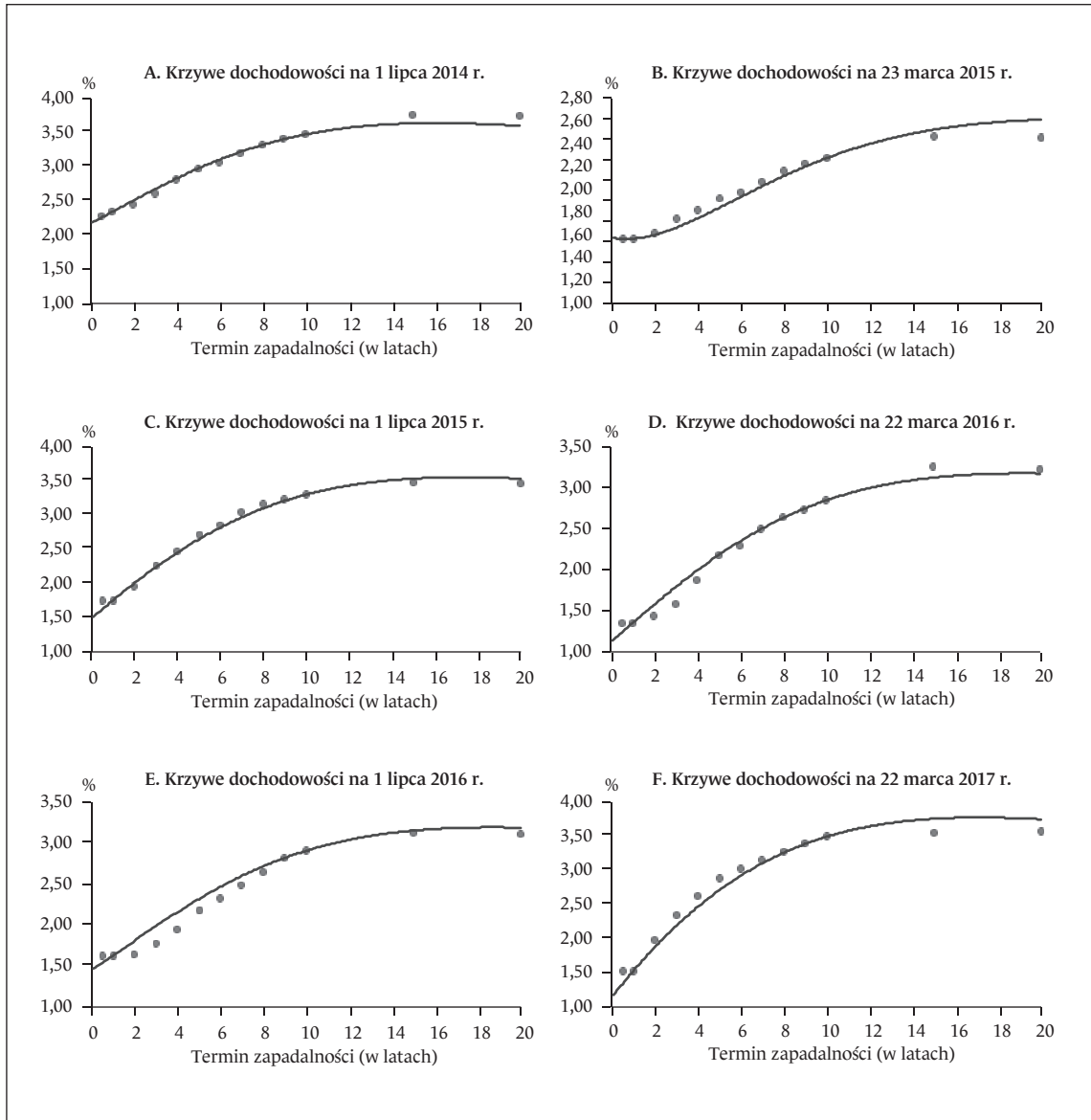
Wystandaryzowane rangi i empiryczna funkcja łącząca (kopuła) dla realizacji składników losowych czynników x i y



Uwaga: realizacje składników losowych z wykresu 4.

Wykres 8

Krzywe dochodowości implikowane przez oszacowany model z parametrami z tabeli 4a i 4b oraz rzeczywiste rentowności obligacji



Uwaga: rentowności w stosunku rocznym przy kapitalizacji ciągłej.

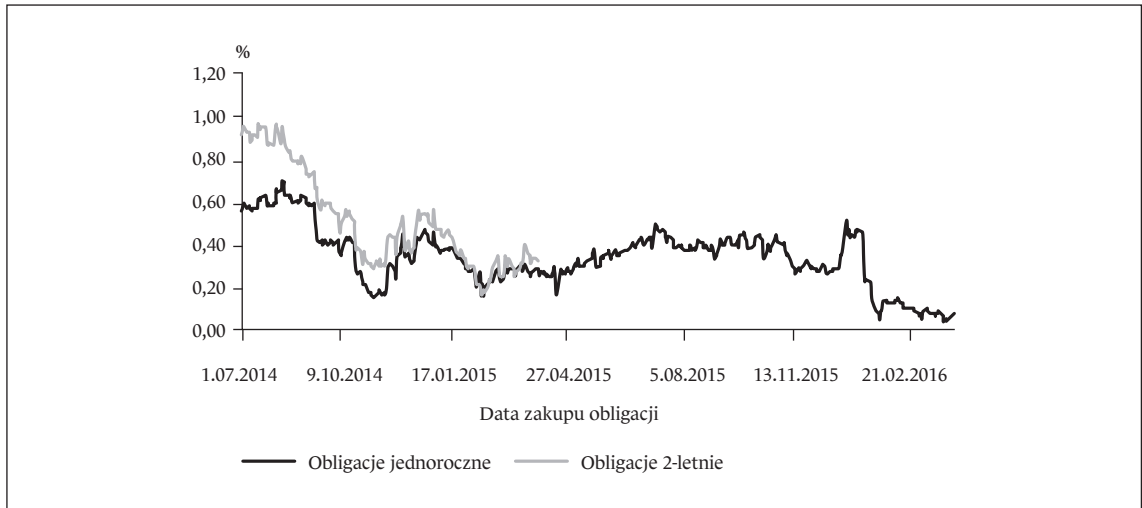
Wykres 9

Trajektoria procesu chwilowej stopy procentowej implikowana przez oszacowany model z parametrami z tabeli 4a i 4b oraz porównanie trajektorii ze stopami WIBID *overnight*



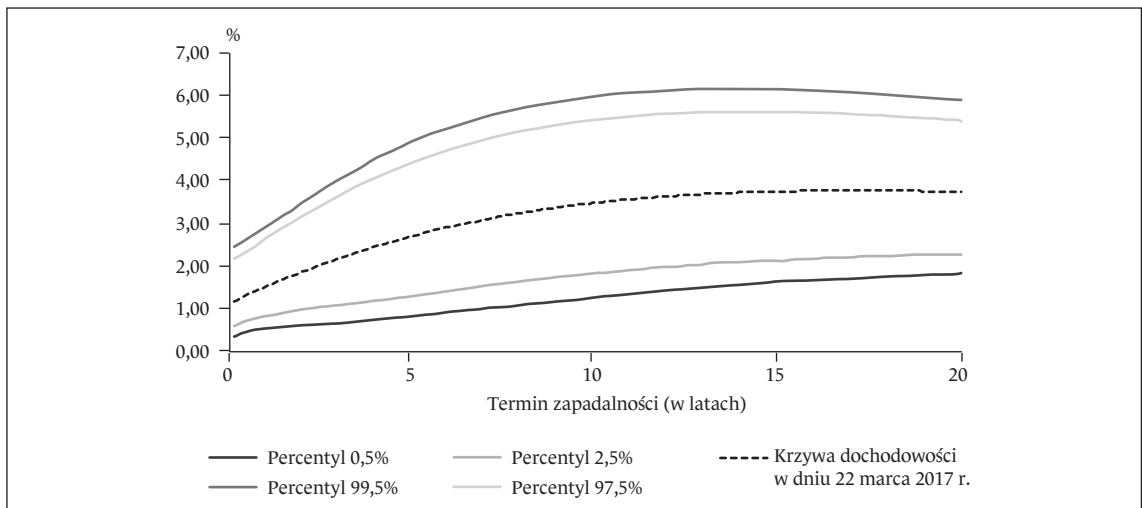
Wykres 10

Oszacowania historycznych premii za ryzyko (w stosunku rocznym przy kapitalizacji ciągłej) dla obligacji skarbowych jednorocznych (w okresie od 1 lipca 2014 r. do 18 marca 2016 r.) i dwuletnich (w okresie od 1 lipca 2014 r. do 18 marca 2015 r.).



Wykres 11

Punktowe 95- i 99-procentowe przedziały ufności dla krzywej dochodowości w perspektywie jednego roku

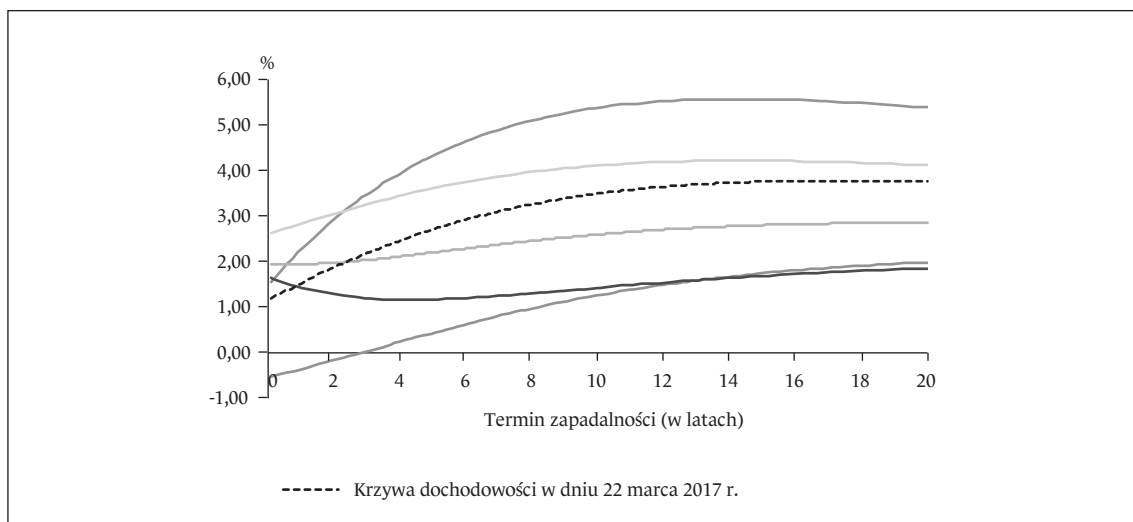


Uwagi:

Bazowa krzywa dochodowości z 22 marca 2017 r. i krzywe dochodowości w perspektywie jednego roku implikowane przez oszacowany model z parametrami z tabeli 4a i 4b. Rentowności w stosunku rocznym przy kapitalizacji ciągłej.

Wykres 12

Przykładowe krzywe dochodowości w perspektywie jednego roku



Uwagi:

Bazowa krzywa dochodowości z 22 marca 2017 r. i krzywe dochodowości w perspektywie jednego roku implikowane przez oszacowany model z parametrami z tabeli 4a i 4b. Rentowności w stosunku rocznym przy kapitalizacji ciągłej.

Tabela 1

Oszacowania parametrów dwuczynnikowego modelu chwilowej stopy procentowej typu G2++ zgodnie z procedurą opisaną w rozdziale 4.2

Parametr	Krok 3	Krok 7	Krok 8
a	0,0426	0,0443	0,0997
b	0,3400	0,3316	0,2452
σ	0,0290	0,0295	0,0574
η	0,0308	0,0313	0,0590
ε	0,0052	0,0052	0,0075
ρ	-0,9883	-0,9887	-0,9970
λ_1	-0,0420	-0,0273	-0,0222
λ_2	-0,1475	-0,1629	-0,0798
$\delta_{0,5Y}$	0,0918%	0,0949%	0,0953%
δ_{2Y}	0,0918%	0,0891%	0,0897%
δ_{3Y}	0,0918%	0,1102%	0,1110%
δ_{4Y}	0,0918%	0,0958%	0,0960%
δ_{5Y}	0,0918%	0,0951%	0,0946%
δ_{6Y}	0,0918%	0,0868%	0,0863%
δ_{7Y}	0,0918%	0,0636%	0,0626%
δ_{8Y}	0,0918%	0,0476%	0,0463%
δ_{9Y}	0,0918%	0,0270%	0,0266%
δ_{15Y}	0,0918%	0,1041%	0,1060%
δ_{20Y}	0,0918%	0,1511%	0,1551%
$x(0)$	1,6958%	1,6924%	0,7179%
$y(0)$	0,4996%	0,5011%	1,4567%
Logarytm funkcji quasi-wiarogodności (2.23)	8 473,26	8 476,66	8 489,76
Logarytm funkcji quasi-wiarogodności (2.24)	49 071,06	49 906,78	50 045,26
Logarytm funkcji quasi-wiarogodności (2.25)	57 544,32	58 383,44	58 535,02

Tabela 2

Oszacowania rozkładów t-Studenta dla składników losowych czynników x i y

Parametr	Rozkład			
	t-Studenta		normalny	
	x	y	x	y
Parametr skali	0,4953	0,5034	0,6065	0,6151
Liczba stopni swobody	6	6	–	–
Logarytm funkcji wiarygodności	-611,74	-621,88	-629,90	-639,54

Uwaga: realizacje składników losowych z wykresu 4.

Tabela 3

Oszacowania funkcji łączących dla składników losowych czynników x i y

Parametr	Kopuła	
	t-Studenta	Gaussa
Współczynnik korelacji	-0,9925	-0,9913
Liczba stopni swobody	3	–
Logarytm funkcji wiarygodności	1 453,46	1 389,00

Uwaga: realizacje składników losowych z wykresu 4.

Tabela 4a

Ostateczne oszacowania parametrów dwuczynnikowego modelu chwilowej stopy procentowej typu G2++ w mierze neutralnej względem ryzyka

Parametr	Model ostateczny
a	0,0997
b	0,2452
σ	0,0574
η	0,0590
ε	0,0075
ρ	-0,9938
λ_1	-0,0222
λ_2	-0,0798
$\delta_{0,5Y}$	0,0965%
δ_{2Y}	0,0911%
δ_{3Y}	0,1126%
δ_{4Y}	0,0966%
δ_{5Y}	0,0941%
δ_{6Y}	0,0860%
δ_{7Y}	0,0617%
δ_{8Y}	0,0452%
δ_{9Y}	0,0262%
δ_{15Y}	0,1077%
δ_{20Y}	0,1560%
$x(0)$	0,7698%
$y(0)$	1,4013%
Logarytm funkcji quasi-wiarogodności (2.23)	8 418,13
Logarytm funkcji quasi-wiarogodności (2.24)	50 035,88
Logarytm funkcji quasi-wiarogodności (2.25)	58 454,00

Tabela 4b

Ostateczne oszacowania parametrów dwuczynnikowego modelu chwilowej stopy procentowej typu G2++ w mierze rzeczywistej

Parametr	Rozkład brzegowy t-Studenta		Kopuła t-Studenta
	x	y	
Parametr skali	0,4953	0,5034	–
Współczynnik korelacji	–	–	-0,9938
Liczba stopni swobody	6	6	3
Logarytm funkcji wiarogodności	-611,74	-621,88	1450,36

Tabela 5

Premie za ryzyko (w stosunku rocznym przy kapitalizacji ciągłej) dla obligacji skarbowych na 22 marca 2017 r.

Termin zapadalności	Cena obligacji implikowana przez model	Oczekiwana wartość czynnika dyskontującego w mierze rzeczywistej	Premia za ryzyko (w %)
0,5	0,9933	0,9940	0,14
1	0,9848	0,9875	0,27
2	0,9632	0,9732	0,52
3	0,9365	0,9571	0,73
4	0,9061	0,9396	0,91
5	0,8733	0,9209	1,06
6	0,8392	0,9013	1,19
7	0,8047	0,8810	1,29
8	0,7705	0,8603	1,38
9	0,7372	0,8394	1,44
10	0,7051	0,8185	1,49
15	0,5692	0,7182	1,55
20	0,4723	0,6297	1,44

Uwaga: premie implikowane przez oszacowany model z parametrami z tabeli 4a i 4b.

Tabela 6

Rynkowe ceny obligacji oraz ceny obligacji implikowane przez oszacowany model z parametrami z tabeli 4a i 4b

Seria	Czas do wykupu (w latach)	Cena rynkowa	Cena implikowana przez model	Błąd względny (w %)
DS0726	9,35	931,58	943,76	1,31
DS1019	2,59	1 102,60	1 108,08	0,50
DS1023	6,60	1 061,34	1 074,20	1,21
WS0429	12,10	1 252,46	1 264,48	0,96
Portfel	12,10	4 347,98	4 390,53	0,98

Tabela 7

Prognoza cen i zmiany cen obligacji związana ze zmianą struktury terminowej stóp procentowych w perspektywie jednego roku

Seria	Cena w dniu 22 marca 2017 r. implikowana przez model	Cena prognozowana na 22 marca 2018 r.			
		percentyl 0,5%	percentyl 2,5%	percentyl 97,5%	percentyl 99,5%
DS0726	943,76	772,51	806,57	1 080,05	1 130,31
DS1019	1 108,08	1 061,81	1 070,98	1 135,51	1 146,22
DS1023	1 074,20	937,70	966,43	1 173,54	1 209,25
WS0429	1 264,48	1 024,96	1 072,58	1 464,14	1 537,99
Portfel	4 390,53	3 799,81	3 919,62	4 850,98	5 023,22

Seria	Cena w dniu 22 marca 2017 r. implikowana przez model	Zmiana ceny w ciągu roku			
		percentyl 0,5%	percentyl 2,5%	percentyl 97,5%	percentyl 99,5%
DS0726	943,76	-171,26	-137,19	136,29	186,54
DS1019	1 108,08	-46,27	-37,10	27,43	38,14
DS1023	1 074,20	-136,50	-107,77	99,34	135,05
WS0429	1 264,48	-239,52	-191,90	199,66	273,51
Portfel	4 390,53	-590,72	-470,91	460,46	632,69

Uwaga: bazowa krzywa dochodowości z 22 marca 2017 r. i krzywe dochodowości w perspektywie jednego roku implikowane przez oszacowany model z parametrami z tabeli 4a i 4b.

Calibration of two-factor instantaneous interest rate model of G2++ type in real-world and risk-neutral measure

Abstract

As an interest rate term structure model we propose a two-factor instantaneous interest rate model of G2++ type in which the distribution of the factors is Gaussian in risk-neutral measure and it is of any type in real-world measure (the marginal distributions and the dependency structure are both allowed to be arbitrary). In order to calibrate our model we suggest to use quasi-likelihood method based on observed government bonds' yields for all available maturities. In this paper we estimated our model of G2++ type using government bonds' yields from the Polish market. As a two-dimensional distribution of the factors in real-world measure we identified a distribution with marginal t-Student distributions and t-Student copula with different degrees of freedom. We investigated in details the fit of the model in real-world and risk-neutral measure. Our model was next used to project the yield curve of the Polish government bonds in one year time. In addition, based on the projected yield curves we priced a portfolio of bonds and we calculated solvency capital requirement for interest rate risk for the portfolio of bonds.

Keywords: yield curve, G2++ model, quasi-likelihood, t-Student copula, Solvency Capital Requirement

